AL SOCIETY

MEMOIRS

OF THE

COLLEGE OF SCIENCE

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY

SERIES A

VOL. XV, NO. 4

JULY 1932

KYOTO

Théorie de l'Écoulement des Eaux Souterraines

par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 18 mai, 1932)

Sommaire

Pour établir la théorie de l'écoulement des eaux souterraines, on suppose qu'il se compose des tubes capillaires dans le sous-sol, et obéit à la loi de Poiseuille. Calculant la probabilité pour qu'il suive chacun des circuits, on en déduit le circuit moyen parcouru $\bar{S}=x\sqrt{1+\frac{2}{\pi}}$, x étant l'épaisseur du sous-sol borné de deux surfaces perpendiculaires à la direction du gradient maximum.

Supposant que le sous-sol se compose des sables du diamètre moyen d, on en discute la manière de les ranger sur la section, dont on distingue deux cas les plus probables, et la manière de les emballer dans l'espace, dont on distingue trois cas les plus probables. on en déduit, à la condition de tenir compte des probabilité pour que ces cas se passent, la formule la plus probable

$$V=31.89\frac{d^2\eta}{\mu k}\ \frac{\text{mètre}}{\text{jour}}$$

appelant V la vitesse moyenne, d le diamètre moyen des sables en mm., η la pente, μ la viscosité, et k le vide. Elle est bornée supérieurement par celle de Slichter et inférieurement par celle de M. Hazen.

Si, pour même pente η, on augmente le diamètre des tubes capillaires, le débit s'accroît de plus en plus, et le terme en carré du débit prend de l'importance. Il en résulte qu'on a la formule de M. Forchheimer

$$\eta=aV+bV^2$$

au lieu des formules précédentes.

Ces formules théoriquement établies conforment aux expériences.

[I] Probabilités des circuits parcourus

Des eaux souterraines écoulent plus ou moins vite selon la nature du sol, sableux ou argileux, mais la vitesse est, en général, très faible.[1]

1. M. W. Koehne, Grundwasserkunde, 25 (1928).

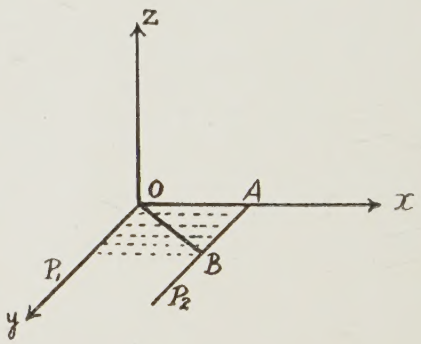
Nous supposons que l'écoulement s'effectue au moyen des tubes capillaires dans le sous-sol et il obéit à la loi de Poiseuille

$$I=\frac{\pi p r^4}{8 l \mu} \qquad \text{.....(1)}$$

appelant I le débit, p la différence des pressures de deux points de tube capillaire dont longueur est l, rayon r, et puis μ le coefficient de viscosité. Sous ces conditions, on peut supposer que les eaux courantes souterraines se composent de l'ensemble des débits des tubes capillaires souterraines.

Si l'on prend deux lignes isobares Oy, AB dans le sous-sol, c'est à dire les lieux des points souterraines portant la même pression hydrolique p_1 ou p_2 (fig. 1), elles sont sensiblement perpendiculaires à la même ligne Ox qui représente la direction du gradient maximum. Chaque courant capillaire des eaux parcourt au hasard les espaces inégaux OA, OB etc. Quelle est la probabilité pour qu'un courant d'eau appartienne au circuit $OB=S$? C'est notre problème de trouver la probabilité pour que l'eau parcoure le circuit S_1 pris au hasard. Si l'on pose $S_1-S=\Delta S=y$, la probabilité pour que y soit compris entre y et $y+dy$ est donnée par la loi de Gauss

Fig. 1.



$$d\tau v=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2y^2}dy \qquad \text{.....(2)}$$

Prenant $\Delta S=0$, il correspond à la probabilité maximum pour que se trouve le circuit géodésique S. Pour calculer le circuit moyen parcouru $\bar{S}$, il faut trouver l'écart moyen $\bar{y}$ ou $\Delta\bar{S}$, on déduit de (2)

$$\bar{y}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty ye^{-h^2y^2}dy=\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad \text{.....(3)}$$

Si chaque circuit est presque de la forme rectiligne[1], l'espace moyen parcouru se représente par l'équation

$$\bar{S} = 1\sqrt{x^2 + \bar{y}^2} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 h\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

x étant l'épaisseur OA du mur souterrain (fig. 1).

On se propose de chercher la valeur approchée h dans l'équation (2), parce qu'il est evidemment une fonction de x. Le circuit capillaire des eaux souterraines, dont la forme est naturellement assez troublée et compliquée, et plus écartée d'augmentation de distance x, mais en effet l'écart y est assez petitement borné. Dans ce domaine où $\frac{y}{x}$ est très petit, on peut supposer que la probabilité de la route S est proportionnelle au gradient $\frac{p}{S}$, d'où l'on obtient

$$\frac{cp}{S} \div \frac{h}{1/\pi} = e^{-h^2 y^2}$$

c étant une constante. Développant les deux membres de cette équation suivant les puissances de y, et en égalant les coefficients des deux premiers, et en négligeant les termes plus puissants que $\left(\frac{y}{x}\right)^4$, on aura

$$h = \frac{1}{x\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Remplaçant h par sa valeur dans (4), on a

$$\bar{S} = x\sqrt{1 + \frac{2}{\pi}} = 1.279x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Il en résulte que, pour appliquer la formule (1) au courant des eaux souterraines, il faut substituer l par $\bar{S}$, et le débit total I donné par l'unité de la section perpendiculaire à la direction Ox à l'origine O (fig. 1).

$$I = N\frac{\pi p \bar{r}^4}{8\bar{S}\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

---

1. Même s'il n'en est pas de cas, la vitesse d'eau étant très faible, on peut supposer la route rectiligne, car l'eau continue à écouler au rond, non à l'angle aigu.

désignant par N le nombre des tubes capillaires dont rayon moyen imaginé équivaut à $\bar{r}$.

En posant

$$\frac{p}{x}=g\eta \quad \text{.....(8)}$$

g étant l'accélération de pesanteur, et éliminant $\bar{S}$ et p dans l'équation (7), il s'écrit sous la forme suivante

$$I=B\eta \quad \text{.....(9)}$$

B désignant $N\frac{\pi g\bar{r}}{8\times 1.279\mu}$.

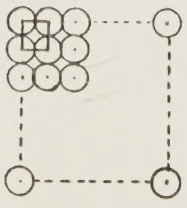
C'est ainsi que le débit est proportionnel à la pente η, c'est la règle de Darcy[1], vérifiée par les expériments, B étant une constante rapportée au sous-sol.

[II] Manière de ranger les sphères sur la section

Si le sol se compose des sables, des graviers dont rayon moyen est ρ, nous cherchons d'abord la section perpendiculaire au courant, avec les sphères du même rayon ρ au lieu de l'ensemble des sables, des graviers. On en distingue au point de vue de la manière de les ranger sur la surface deux cas les plus probables.

(A) Les sphères du même rayon ρ se tiennent côte à côte et figurent une forme carrée par chaque quatre (fig. 2). On désigne par la porosité moyenne q_2 dans ce cas le rapport de la somme des aires de la fente moyenne à l'aire total sur la section, c'est à dire la somme des aires de la fente moyenne qui se trouve en l'unité de carré. Il vient

Fig. 2



$$q_2=N_2\pi\bar{r}_2^2 \quad \text{.....(10)}$$

appelant N_2 le nombre des tubes capillaires dont la section équivaut au cercle effectif du rayon imaginé $\bar{r}_2$, ajoutant à toutes les lettres le suffixe 2 dans ce cas, et l'on a

$$N_2=\frac{1}{4\rho^2} \quad \text{.....(11)}$$

car il y a une tube en chaque carré de 2ρ (fig. 2).

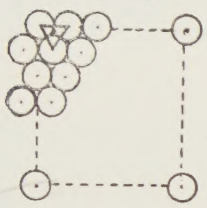
1. MM. Flinn Weston and Bogert, Waterworks Handbook, 79 (1918)

Si l'on élimine $\bar{r}$, N entre les équations (7), (10) et (11), on obtient le débit I_2 dans ce cas

$$I_2 = \frac{4q_2^2 \not{p} \rho^2}{8\pi \bar{S} \mu} \quad \ldots\ldots(12)$$

(B) Les sphères se tiennent côte à côte, et figurent la forme triangulaire par chaque trois. Le raisonnement précédent s'applique dans ce cas, changeant le suffixe, on a de même

Fig. 3



$$q_1 = N_1 \pi \bar{r}_1^2 \quad \ldots\ldots(13)$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}\,\rho^2} \quad \ldots\ldots(14)$$

et

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}\, q_1^2 \not{p} \rho^2}{8\pi \bar{S} \mu} \quad \ldots\ldots(15)$$

La formule (12) ou (15) est valable selon que la surface contient les carrés ou les triangles des sphères.

[III] Manière d'emballer les sphères dans l'espace

On va chercher au point de vue de l'emballage des sphères dans l'espace limité, trois cas les plus probables.

(C) Supposons, d'abord, les emballer d'une manière assez compacte dans l'espace comme le figure ci-jointe (fig. 4). On en tire un groupe

Fig. 4

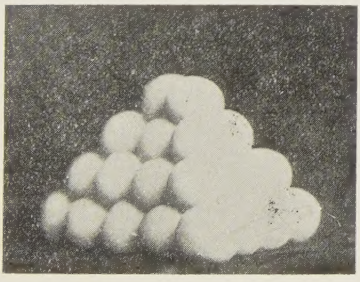
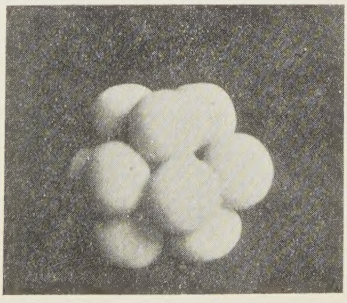


Fig. 5

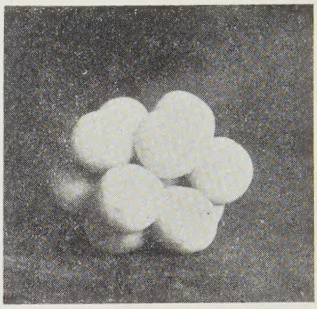


composé de treize sphères, dont douze sphères se trouvent autour de la sphère envisagée, autrement dit, celle-ci est en contact avec les douze sphères dont on découvre six fois la forme carrée, et huit fois la forme triangulaire (figs. 5 et 6).

Les probabilités pour que le groupe ait, comme la surface dirigée

au courant, celle de la forme carrée ou de la forme triangulaire, se correspondent aux sommes des angles solides avec lesquelles fait face au centre de la sphère envisagée le carré ou le triangle. On peut les évaluer, calculant l'excès sphérique par la formule d'Huilier.

Fig. 6



La somme des angles solides
de huit triangles $\lambda_1 = 4.4104$,
„ de six carrés $\lambda_2 = 8.1558$,
d'où $\lambda_1 + \lambda_2 = 4\pi$.

En tenant compte des probabilités, réunissant (15) et (12), on en déduit le débit moyen dans ce cas,

$$I_{1.2} = \frac{1/3\, q_1^2\lambda_1 + 4q_2^2\lambda_2}{8\pi\overline{S}\mu.4\pi} p\rho^2 \quad \ldots\ldots(16)$$

Bien que l'eau court dans tous les sens, on suppose la divisée en deux directions dirigées aux deux surfaces voisines du groupe, et l'on aura $I_{1.2}$ comme le débit moyen dans ce cas.

On désigne par le vide k le rapport de la somme des volumes vides dans le sous-sol au volume total, c'est à dire la somme des volumes vides qui se trouvent en l'unité de cube, et le vide est calculé dans ce cas comme le problème de la trigonométrie sphérique.

$$k_{1.2} = 0.2556 \quad \ldots\ldots(17)$$

qui représente théoriquement la valeur minimum des vides. En effet, on a 0.26 comme la valeur minimum des vides par l'expériment sur sables assez comprimés[1].

On en voit qu'il y a une relation entre le vide k et la porosité moyenne q, parce que l'un est volumétrique et l'autre se rapporte à l'aire de la fente moyenne sur la section. Alors, k égale à q multiplié d'unité de longueur, c'est à dire ils ont la même valeur numérique. Il en résulte dans ce cas

$$k_{1.2} = q_1 = q_2.$$

On aura donc

$$I_{1.2} = \frac{(1/3\,\lambda_1 + 4\lambda_2)k_{1.2}^2}{8\pi\overline{S}\mu.4\pi} p\rho^2 = 0.006512\frac{p\rho^2}{x\mu} \quad \ldots\ldots(16\text{bis})$$

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.
M. A. Schoklitsch, Der Wasserbau I, 170 (1930).

Les raisonnements précédents s'appliquent à l'étude des cas suivants.

(D) Supposons, ensuite les emballer d'une manière un peu lâchement comme le figure ajouté (fig. 7).

La sphère envisagée est en contact avec huit sphères, dont six sphères se trouvent autour du cercle grand de la sphère envisagée, et deux sur les pôles de celle-ci (fig. 8).

Autrement dit, il fait un groupe de six sphères formant un prisme, dont on trouve deux fois la forme triangulaire et trois fois la forme carrée (fig. 9).

Fig. 7

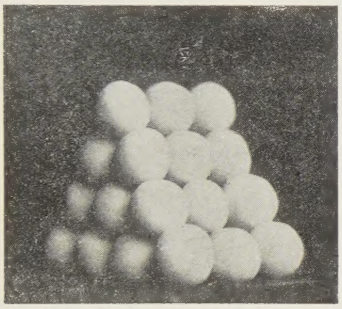


Fig. 8

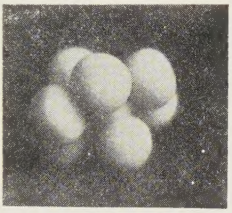
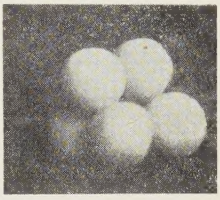


Fig. 9



Pour chercher les probabilités, on calcule, de la même manière précédente, les angles solides du carré ou du triangle envers le centre du prisme.

La somme des angles solides de deux triangles $\lambda_3 = 2.389$

„ de trois carrés $\lambda_4 = 10.177$

d'où $\lambda_3 + \lambda_4 = 4\pi.$

Réunissant (15) et (12) en vertu des probabilités, on en déduit le débit moyen dans ce cas

$$I_{3,4} = \frac{1\sqrt{3}\, q_1^2 \lambda_3 + 4 q_2^2 \lambda_4}{8\pi \bar{S} \mu . 4\pi} p\rho^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

et le vide calculé géométriquement

$$k_{3,4} = 0.3954 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Ayant $k_{3,4} = q_1 = q_2$ dans ce cas comme cité plus haut, il vient

$$I_{3,4} = \frac{(1\sqrt{3}\ \lambda_3 + 4\lambda_4) k_{3,4}^2}{8\pi \bar{S} \mu . 4\pi} p\rho^2 = 0.01736 \frac{p\rho^2}{x\mu} \quad \ldots\ldots\ldots (18\text{bis})$$

(E) Supposons dernièrement les emballer assez lâchement comme le figure annexé (fig. 10).

La sphère envisagée est en contact avec six sphères dont quatre sphères se trouvent autour du cercle grand de la sphère envisagée et deux sur les pôles de celle-ci (fig. 11).

Autrement dit, il fait dans ce cas un groupe de huit sphères formant un cube, dont on trouve six fois le carré seulement (fig. 12).

Fig. 10

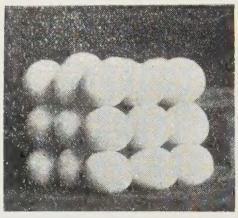


Fig. 11

Fig. 12

On déduit de (12) la formule du débit dans ce cas

$$I_5=\frac{4q_2^2p\rho^2}{8\pi\bar{S}\mu} \quad \text{.....(20)}$$

et le vide calculé

$$k_5=0.4764 \quad \text{.....(21)}$$

On obtient expérimentalement 0.47 comme la valeur maximum du vide soit en sable soit en argile[1].

Ayant $k_5=q_2$ dans ce cas, il se conduit

$$I_5=\frac{4k_5^2p\rho^2}{8\pi\bar{S}\mu}=0.02824\,\frac{p\rho^2}{x\mu} \quad \text{.....(20bis)}$$

[IV] l'Énoncé de la formule générale

Il faut calculer les probabilités pour que ces trois cas (C), (D), (E) se passent naturellement. Il dépend des stabilités des trois cas, car le sol prendra petit à petit la forme fort comprimée, dont le potentiel de la force pesante vient à la valeur minimum à cause du choc de la pluie et du vent. La probabilité cherchée w est donc une fonction du vide

$$w=f\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \quad \text{.....(22)}$$

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.

où

$$\frac{\varepsilon}{k} < 1$$

ε étant une constante.

Développant (22) suivant les puissances de $\frac{\varepsilon}{k}$, et en prenant le premier terme, elle peut être inversement proportionnelle aux vides $k_{1.2}$, $k_{3.4}$ et k_5, à savoir, le rapport des probabilités des trois cas égale à

$$\frac{1}{k_{1.2}} : \frac{1}{k_{3.4}} : \frac{1}{k_5} \quad \text{.....(22bis)}$$

Appliquant cette relation des probabitités, en réunissant les trois cas, on arrive à la formule générale du débit moyen

$$I = \left(\frac{I_{1.2}}{k_{1.2}} + \frac{I_{3.4}}{k_{3.4}} + \frac{I_5}{k_5} \right) \Big/ \left(\frac{1}{k_{1.2}} + \frac{1}{k_{3.4}} + \frac{1}{k_5} \right) = 0.01506 \frac{p\rho^2}{x\mu}$$

.....(23)

C'est ce qu'on a théoriquement cherché, de même, le vide moyen

$$k = \left(\frac{k_{1.2}}{k_{1.2}} + \frac{k_{3.4}}{k_{3.4}} + \frac{k_5}{k_5} \right) \Big/ \left(\frac{1}{k_{1.2}} + \frac{1}{k_{3.4}} + \frac{1}{k_5} \right) = 0.3513$$

.....(24)

il s'accorde avec la valeur expérimentale 0.35 du vide concernant les sables[1].

Substituant ρ par le diamètre d en mm. dans (23), et tenant compte de l'équation (8), il vient

$$I = 0.03691 \cdot \frac{d^2\eta}{\mu} \quad \frac{\text{cm}^3.}{\text{cm}^2.\ \text{sec.}} \quad \text{.....(25)}$$

Il s'ensuit que le débit I en centimètres cubes par seconde à travers un centimètre carré de la section normale au courant est proportionnel au carré de diamètre moyen d des sables dont la terre se compose, à la pente η, et inversement proportionnel à la viscosité μ qui est une fonction de la température[2].

Le coefficient numérique de (25) représente la valeur la plus probable qui dépend des circonstances naturelles. Quant au diamètre

---

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.
2. MM. Landolt, Phys. chem. Tabellen, I, 137 (1923)

moyen d, on suppose pratiquement que si l'on partage au point de vue de la grandeur à l'aide du diamètre d un morceau du sol en deux parties, chacune de celles-ci a le même poids.

Supposé qu'une sable soit de la forme éllipsoide, on désigne par d le diamètre de la sphère de même volume que celle-là.

Les formules (24) et (25) permettent d'en déduire la vitesse moyenne de l'écoulement d'eau dans le sous-sol, il vient

$$V_1 = 6.304 \frac{d^2\eta}{\mu} \quad \frac{\text{cm.}}{\text{min.}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

ou plutôt

$$V = 31.89 \frac{d^2\eta}{\mu k} \quad \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

[V] Vérification des formules et conclusion

Calculant les valeurs V_1 de la formule (26), sous les conditions $\eta = 0.1$, $\mu = 0.01301$ à la température 10°C, on les compare aux valeurs U_k des expériments de King[1] comme il suit :

No. des sables	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
d^{mm}	2.54	1.808	1.451	1.217	1.095	0.915	0.799	0.715	0.600	0.520
$U_k \frac{\text{cm.}}{\text{min.}}$	158	81	56	42	37	26	17	11	8	6
V_1 "	313	154	102	72	58	40	31	25	17	13

Il s'ensuit que, dans ce cas, notre équation V_1 donne la valeur plus grande que U_k.

La formule empirique de M. Hazen donne la vitesse U_H de l'écoulement d'eau souterraine par l'équation suivante

$$U_H = c_1 d_1^2 \eta \frac{t+10}{60} \quad \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

appelant c_1 une constante associée au sous-sol, d_1 le diamètre effectif[2], t la température en degrés Fahrenheit, et désignant par $\frac{60}{t+10}$ fonction de la viscosité.

En vertu des données expérimentales qui suivent, il se réduit premièrement

1. M. E. Prinz, Handbuch der Hydrologie, 173 (1919).
2. MM. Flinn, loc. cit. 739.

à $t=50°F$		
U_H	d_1	η
0.02499	0.1	0.001
223.1	3	0.01

$$U_H = 2499 d_1^2 \eta \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \quad \ldots\ldots(29)$$

Dans le même cas, en tenant compte de $\mu=0.01301$, notre équation (27) se représente par l'équation

$$U_1 = 60.77 d^2 \gamma \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \quad \ldots\ldots(30)$$

Quand on compare (30) avec (29), notre équation donne la valeur aussi plus grande que celle de M. Hazen.

Or à la comparaison de l'équation (27) avec celle de Slichter

$$U_1 = 88.31 \frac{d^2 \eta}{\mu k} \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \quad \ldots\ldots(31)$$

notre équation donne contrairement la valeur plus petite que celle-ci.

En conclusion, notre équation donne la valeur moyenne entre celles de King, Hazen et Slichter.

Si le débit s'accroît, il faut modifier le coefficient de la formule (30). C'est pourquoi qu'on la déduit de la formule (1), au lieu de laquelle, dans ce cas, il faut supposer la formule suivante[1] :

$$p = \frac{8\mu l}{\pi r^4} I + \frac{1}{\pi^2 r^4} I^2 \quad \ldots\ldots(32)$$

le terme en I^2 étant négligeable quand le débit est très faible, mais il prend de l'importance quand le débit devient un peu grand. Si donc, le débit s'augmente de plus en plus, le terme en I^2 intervient et la loi de Poiseuille cesse d'être exacte.

Si l'on remarque la relation entre la différence de la pression et le débit dans (32), on peut établir l'expression suivante, semblable à l'équation (32)

$$\eta = aV + bV^2 \quad \ldots\ldots(33)$$

a et b étant deux constantes associées au sous-sol. On la nomme la formule de M. Forchheimer qu'on utilise dans ce cas, à la place de celle de Darcy. O. Raynolds a trouvé que, si la vitesse moyenne V est inférieure à $1900\frac{\mu}{r}$, le régime de Poiseuille peut encore subsister,

1. M. M. Brillouin, Leçons sur la viscosité, I, 137 (1907).

si cette limite est dépassée, le régime de Poiseuille disparait forcément, et l'on y a le régime hydrolique[1].

J'adresse l'expression de ma respecteuse reconnaissance à M. le professeur K. Tamaki qui a bien voulu m'aider de ses précieux conseils, et je remercie également M. le professeur T. Nomitsu qui m'a approuvé ce travail, en y apportant des corrections nécéssaires avec une très grande bienveillance.

1. M. M. Brillouin, loc. cit. 218.
M. A. Schoklitsch, loc. cit.

On the Distribution of Bombs from a Volcanic Vent

By

Takaharu Nomitsu and Munetosi Namba

(Received May 27, 1932)

Abstract

Of the several central-cones of the world-widely known volcano Mt. Aso, Nakadake is the only one which is still active now as of old, and its fourth crater erupted many times during the years 1928–1930. On each occasion, one of the writers, Namba, examined carefully the distribution of bombs around the vent, together with various other matters and found that the area of distribution was elliptic in form and its center was extremely eccentric from the vent. The present paper aims at elucidating such peculiar distribution of bombs.

Judging from the circumstances, this seems due to the fact that the fourth crater of Aso has a cylindrical vent of remarkable depth and the pit in it usually deviates from the center of the vent's bottom.

Thus, making the depth of the vent h and the distance of the vent wall in an azimuth θ from the pit λ_θ, we calculated the maximum range, R_θ, of bombs projected out with the initial velocity V on the atrio, and we obtained

$$R_\theta = m\frac{h.\lambda_\theta(V^2-gh)}{g(h^2+\lambda^2_\theta)},$$

where

$$m = 1+\sqrt{1-\frac{g^2(h^2+\lambda^2_\theta)}{(V^2-gh)^2}}.$$

This equation represents generally an elliptic curve, and specially, if m is independent of azimuth θ, then it becomes an ellipse exactly.

Applying the formula to the real activity of Aso crater, we see that it proves sufficiently reliable.

I. Activity of Mount Aso during 1928—1929

§ 1. The Position and the Present State of the Recent Center of Activity of Aso.

In the group of central-cones of the great-Aso volcano, five typical cones called "Go-Gaku" in a lump have been very famous from

ancient times. Their ancient names are Neko-dake, Taka-dake, Narao-dake, Ebosi-dake, and Kisima-dake, taking them in order from the east, and the whole view of them can be spectacularly commanded only from Miyazi, the chief town in this district. Narao-dake was also known as Naka-dake, and undoubtedly it included the active region of Aso which is named "Naka-dake" in the recent map produced by the Land-Survey Department, and numerous eruptions of it in historical times are recorded. It is also the only one which has maintained its volcanic activity down to the present. Naka-dake is a "somma type" volcano, and its ancient great crater is now enlarged to an elliptic form of nearly $2000^m \times 1000^m$ in extent, and its atrio is developed mostly at the south part called "Suna-senri-ga-hama". Of the several recent craters on its central cone, the conspicuous ones are named the first, the second, the third, the fourth, the fifth, and the sixth (or New crater) in order from the north. They are arranged roughly in the direction NW—SE which is generally considered to indicate a structural weakness (Fig. 1).

Fig. 1.
Ancient and Recent Craters of Naka-dake.
(Craters 1, 2, 3, 4, 5 were named by Mr. Nôtomi. 6 is called also "New-Crater".)

Of these craters the fourth has been most energetic since 1923, and its encircling ring is roughly 400^m EW $\times$ 300^m NS in extent and is partly sunk in E, N, W and SW portions. The vent was slightly dislocated to the west from the center of crater. The whole crater is not an inverted cone but funnel-like (Fig. 2), owing to its frequent outbursts.

Numerical data of the vent measured on 20th Dec. 1928 and 8th Nov. 1929 are as follows:—

Vent's diameter $\fallingdotseq 30^m$ (by a clinometer and tape measurement),
Depth of the bottom $\fallingdotseq 160^m$ below the level of Senri-ga-hama (by a tape measurement),
Max. height of the somma $\fallingdotseq 70^m$ above the level of Senri-ga-hama (by a hand level).

Fig. 2

The Fourth Crater and its Vent (July 1931).

On that occasion a pit filled with red-hot magma could be witnessed at the bottom of the vent, and also half-way down the vent-wall some old black magma was perceived to have adhered at a depth of about 90 meters below the level of Senri-ga-hama. The latter was inferred from its state and situation to be perhaps the residual head of the magma reservoir at the initial stage of recent activity. It seems indeed to the writers to be very probable that in the Aso crater also some rise and fall of the magma-head may take place at intervals.

The vent can be regarded as forming practically a vertical cylinder up to the level of Senri-ga-hama, though its upper rim has been slightly enlarged by collapsing. Since we are concerned only with the maximum range of projected bombs, it is scarcely necessary to take into account the effect of the somma, since through its sunken portion the ejecta are easily dispersed on the atrio.

§ 2. Sketch of the Eruptions of the Fourth Crater.

The dates and types of the eruptions of Mt. Aso from Sept. 1928 to Sept. 1929 are tabulated below.

Type I	Type II	Type III
Great eruption after a long repose	Activity after a short repose in rainy season	Activity after a short repose in dry season
1. 1928 Sept. 6–	1. 1929 May 9–	1. 1928 Dec. 19–
2. 1930 Sept. 5–	2. 1929 June 22–	2. 1929 Jan. 22–
	July 11–	Jan. 30–
	July 25–	Feb. 20–
	3. 1929 Aug. 24–	Mar. 6–
		„ 18–
		„ 29–
		3. 1929 Sept. 14–
		Oct. 6–
		„ 22–
		4. 1929 Nov. 4–

M. Namba observed all these eruptions, except that on Sept. 6, 1928, and the general aspect and characteristics of each type will be sketched below.

[I] *Great eruption after a long repose.*

Let us describe here the eruption on 5–10 Sept. 1930 as a model of the first type.

The fourth crater had ceased being active since 8th Nov. 1929, and in January 1930 a hot water pool filling the vent became visible. The bottom of the vent was constantly being buried by the ashes poured into, especially during the "Tsuyu" (most rainy season in Japan), till at last on 26th Augast 1930 the water head rose up to 60 meters below the level of Senri-ga-hama and the crater-wall was thoroughly eroded to the naked rocks by the rains. An active point existed at the west part of the vent pool. On the 29th the pool became so tumultuous that people began to fear an eruption, and on 2nd Sept. white smoke began to rise from the pool, accompanied by rumblings. At 17 o'clock 4th Sept., the white smoke abruptly began to blow out much more quickly and was gradually mingled with ash.

At last at about half past eleven o'clock on the 5th, the first great explosion took place. A great amount of so-called "Ku-sui" (苦水, hot water in the vent) was effused out in all directions in an extremely muddy state. Vast clouds of volcanic dust, "Yona" (霾) as it is called in this district, were thrown out into the sky, and bent to SW by the NE wind blowing at the time, and showered ashes on

the ground in that direction. Thus at the hot spring sanatorium of Tochinoki roughly 9 kilometers SW of the crater, the ash accumulation was more than 100 grams per square meter in one day (18^h 5th–18^h 6th Sept.), and at the SW part of somma it was about 60 cms. thick on 8th Sept.

The bombs ejected during this eruption were distributed in an elliptical region whose extent was longest NNW—SSE and whose center was extremely deviated from the vent in the NE direction in spite of the NE wind as shown in Fig. 3.

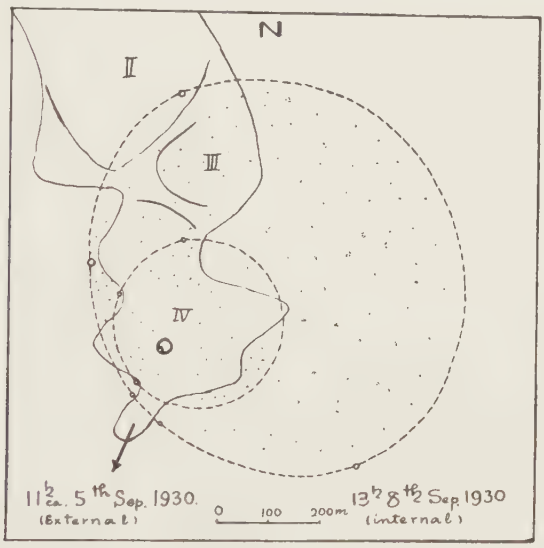


Fig. 3

◎ Vent and Pit. ↙ Wind Direction (Smoke).
○ Remarkable Bombs.

Bombs weighing about 200 kgs. ejected in the north were carried even to the second crater.

As the bombs afterwards would often be buried out of sight by the accumulation of Yona, it must be borne in mind that as time passed the real distribution of the bombs might possibly be misjudged.

From the sun-set hour on the 7th, the percentage of fragments of plastic magma among the ejecta increased.

On 10th Sept. the outburst ceased, and only rumbling was heard from time to time—about once every 30 minutes. During several hours immediately after the outburst had ceased, the inside of the vent

remained vacant and clear so that there was an excellent opportunity to observe the condition of the vent-bottom.

After that period the vent was filled with white smoke caused by water juveniel or vados, and then a hot water pool gradually reappeared at the basin as time passed.

We shall add here two more facts which are very important for our present purpose.

After the eruption on 5th Sept., a mass of old ash and debris could be observed still left at the east side of the vent, showing that the outburst occurred at a point on the west wall-side and that it was to be called a "wall-side eruption". It was this indeed, together with the fact that in spite of the NE wind the distribution of ejected bombs was in an elliptical form as in the outer curve in Fig. 3, that caused us to write the present paper.

Moreover, since by the successive outbursts almost all the pre-existing old ash and debris in the vent were swept away and also an abundant amount of new magma was ejected out as bombs or other materials, the depth of the vent gradually increased and the distribution area of bombs at the later outburst became more and more circular as is shown by the inner curve in Fig. 3. This fact too greatly attracted our attention.

In short, a great eruption after a long repose advances as follows:—

1. In the time of repose, the vent bottom gradually ascends owing to both the pouring in of the old ash and debris from without, and the internal action of upheaval of the magmatic head. When the accumulation of old ash and debris has sufficiently advanced, liquid water begins to stay on it and gradually forms a mysterious pool of hot water.

2. At the earliest stage of activity the white smoke generally becomes much denser and the water of the pool boils and spouts up vigorously as described frequently in the history of Aso.

3. Meanwhile the eruption begins with thick white smoke mingled with ash and gradually sweeps out the old Yona and bebris in the vent by successive outbursts.

4. About the time when the old ash is swept away down to the magma dome, it develops into a most splendid black-smoke-eruption loaded with plastic lava fragments.

5. If the old ash has been entirely swept out and the eruption

has become a phenomenon of only the magmatic reservoir, then the terrible noise ceases and the fall of Yona diminishes but the proportion of plastic lava increases. The depth of the vent gradually increases owing to the successive outbursts.

6. After several days the eruption ceases, except for a few occasional rumblings.

7. During a few hours immediately after the end of the eruption, the vent is vacant and clear with no smoke, but it then becomes in a day filled up with white vapour of steam. The whole process just described is then repeated in the same order.

[II] *Activity after a short repose in rainy season.*

This type passes through a course of activity of type I but less vigorous. Owing to severe rain during the rainy season, a great quantity of old Yona and debris is poured into the vent and the floor of the basin ascends and water accumulates to form a pool. Though in this 2nd type of eruption the store of energy may not be very great, the emitted smoke is very dark due to its being densely laden with ash and rises up very high, often over 3000^{m}, because the season is usually calm so far as wind is concerned. Hence in this case also, there is a risk of the bombs being buried by plentiful ash and therefore of misconception as to the real distribution of them. Some variation in depth of the vent during the eruption could be expected empirically as well as theoretically, but it is not so distinct as in the case of type I.

[III] *Activity after a short repose in dry season.*

In the eruption of this type, the most of the ash is very newly made from the internal magma, and the total amount of Yona is necessarily comparatively small. Consequently the emitted smoke is lighter in colour, rather brown than black, but its baneful influence upon fields and life is surprisingly serious. When heavy smoke passes over the ground, vegetation on its path is frequently blighted. A good example is afforded by the withering of trees in the prefectural plantation on Ebosi-dake by Yona in March 1929. On the contrary, in the rainy "Tsuyu" season the baneful influence of Yona on forests is negligible, though sometimes it is appreciable on the crops.

An eruption of this type is most convinient for tracing the distribution of bombs, because the quantity of ash is comparatively small so that bombs are left bare on the ground.

§ 3. Distribution of Bombs.

The observation of the distribution of bombs was executed as follows :—

During the eruptions, the observer only watches conspicuous ejecta and the positions where they fall are noted in a field-book. After the eruption has come to an end, their locations are verified on the ground and marked in a detailed map. In the case of the ejecta on the atrio, the positions of the most distant bombs in every direction are carefully examined with a tape and a compass. When the eruption was on such a small scale that all the bombs fell down into the crater, direct observation and ready mapping were possible.

Some examples of the distribution-area of bombs thus obtained are shown below [Fig. 4 to 8].

Fig. 4

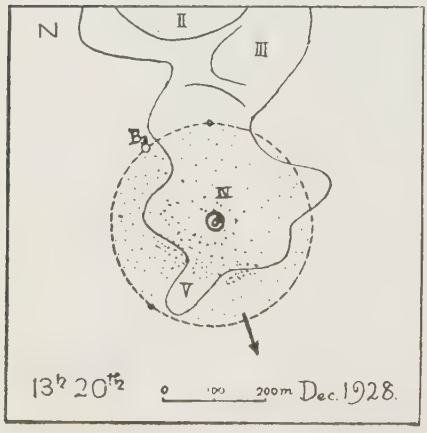
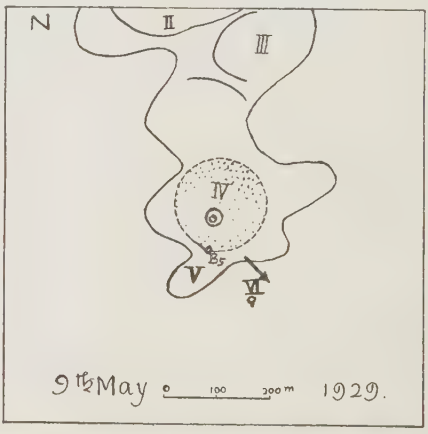
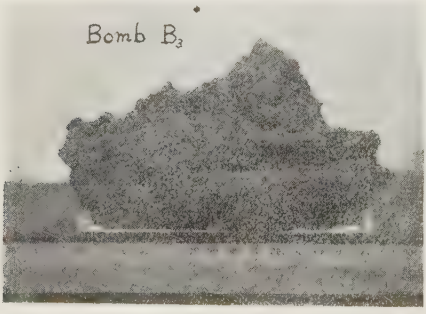


Fig. 6





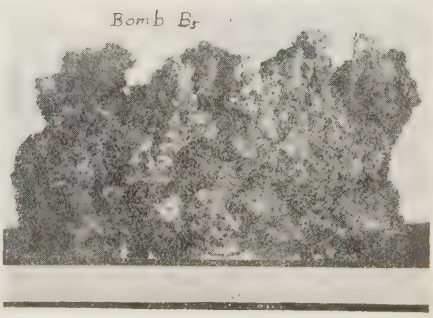
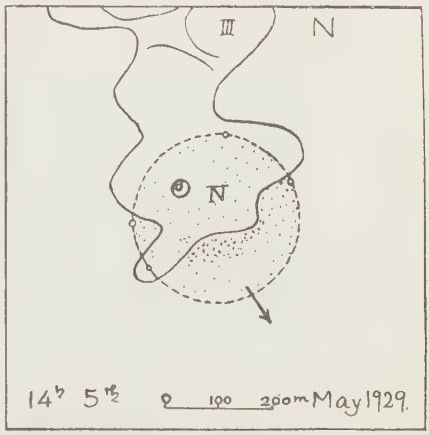


Fig. 5



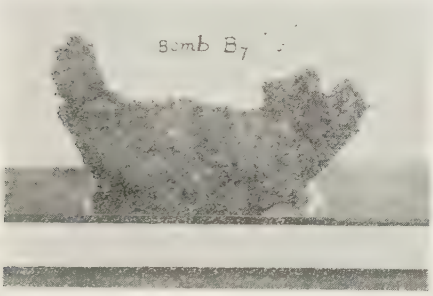
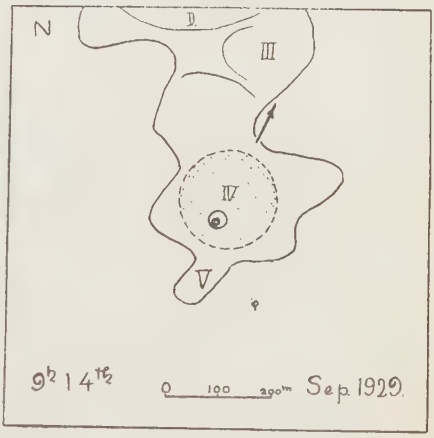


Fig. 7



The position of the pit could be inferred from the observation of the inside of the vent at the time when there was no smoke immediately after the end of the eruption, and also from many other states during the eruption, e. g., the column of smoke in the vent [Fig. 9].

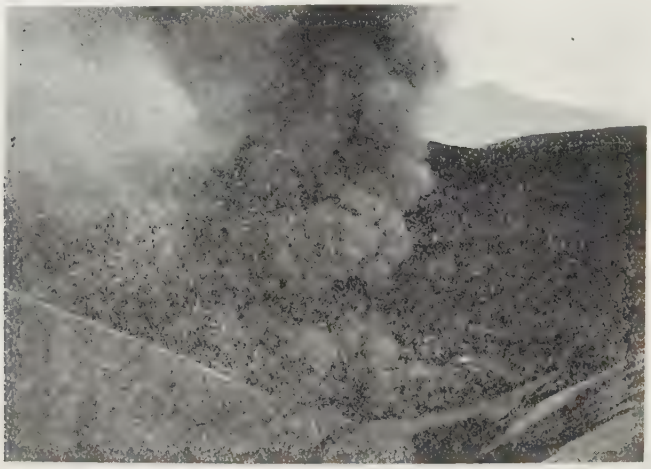
II. Law of Distribution of Bombs from a Cylindrical Vent.

§ 4. A glance at the preceding diagrams of bomb-distribution will show that although the bombs all come from the same vent, the distribution-areas of the ejected bombs are ramarkably unlike one another, and they are extremely eccentric and asymmetrical with reference to

Fig. 9

Smoke revealing the pit's position deviating from the center of the vent-bottom.

(a) July 1929, from the NE side of the crater.



(b) 7th Sept. 1930, from the NW side of the crater.

the vent, and are often elliptical in form. What is the reason of this? It cannot be the effect of the wind. In the eruption on 5th Sept. 1930, in spite of the NE wind, the bombs were ejected eastward from the vent and the boundary of the distribution-area was such an ellipse as is shown in Fig. 3! Then could it be the effect of the direction of the conduit tube of the pit and consequently of the initial direction of the ejected bombs? This also is not probable. In the same eruption,

the pit was obviously located near the west wall side and the mouth of the conduit tube itself was rather inclined to the west, as already described.

In our opinion, the distribution of bombs from the Aso crater seems to be chiefly affected by its tolerably deep cylindrical vent and by its pit, which generally deviates from the center of the vent-bottom. Thus if bombs are ejected with such projection-angles that they can hardly pass over the upper rim of the vent, they will reach the most distant points in each azimuth, and consequently they will limit the external boundary of the distribution-area.

From such a point of view, we will next investigate theoretically what distribution boundary must result on the atrio when bombs are ejected out with the same initial velocity from a point on the bottom of a cylindrical vent, but for the sake of simplicity, neglecting the atmospheric resistance.

§ 5. Maximum Range in one Azimuth attained by the Bombs from a Volcanic Vent.

Generally the path of a projectile in vacuo ejected with initial velocity V and projection angle α is given by

$$z = x.\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V^2}(1+\tan^2\alpha).x^2, \qquad (1)$$

where x and z are respectively the horizontal and the vertical distance from the point of projection.

The two values of x corresponding to $y=h$ are

$$x = \frac{V^2}{g}.\cos\alpha\left\{\sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{2gh}{V^2}}\right\}. \qquad (2)$$

Now let us consider bombs projected in one azimuth from a pit of a cylindrical vent. In Fig. 10 let O be the pit on the bottom of the vent and put

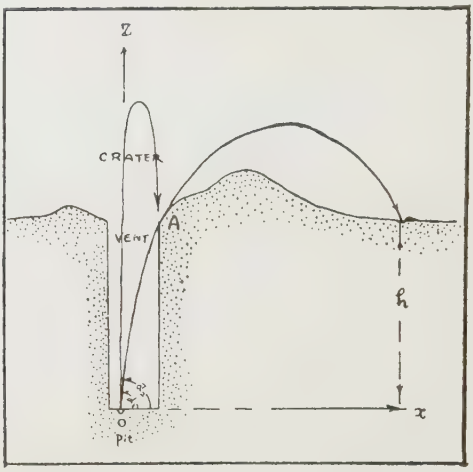
h = the depth of the vent,

λ = the distance of the vent-wall from the pit in the azimuth considered,

α = the projection angle by which the bomb can arrive on the atrio whose plane is assumed to be horizontal,

α_1, α_2 = the minimum and the maximum angle of projection by which the bomb can arrive at just the point A (λ, h), the rim of the vent.

Fig. 10



Then the possible value of α must be

$$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$$

and all the bombs projected at angles of projection without the above two limits α_1 and α_2 must return again into the vent.

Substituting $x=\lambda$ and $z=h$ in (1), we have

$$\tan\alpha = \frac{V^2}{g\lambda}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{2gh}{V^2}-\frac{g^2\lambda^2}{V^4}}\right\}. \qquad (3)$$

Hence

$$\tan\alpha_1 = \frac{V^2}{g\lambda}\left\{1-\sqrt{1-\frac{2gh}{V^2}-\frac{g^2\lambda^2}{V^4}}\right\} \qquad (4)$$

and

$$\tan\alpha_2 = \frac{V^2}{g\lambda}\left\{1+\sqrt{1-\frac{2gh}{V^2}-\frac{g^2\lambda^2}{V^4}}\right\}.$$

In order that the above equations should be possible in reality, the following relation must hold :—

$$V^2 \geqq gh + g\sqrt{h^2+\lambda^2}. \qquad (5)$$

Especially when V is very great, it follows that

$$\alpha_2 \fallingdotseq 90^\circ, \quad \text{and} \quad \tan\alpha_1 \fallingdotseq \frac{h}{\lambda}.$$

Now at the Aso crater during 1928–1929

$$\lambda \fallingdotseq 30^{m}, \quad h \fallingdotseq 160^{m}, \quad \text{and} \quad \frac{h}{\lambda} > 1,$$

and consequently in our case α must be greater than 45°. But when projection angles are greater than 45°, the smaller the angle is, the greater the range becomes, so that the max. range x_m attained on the plane $z=h$ will be the value of x obtained from

$$h = x \tan \alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{g}{V^2}(1+\tan^2\alpha_1)x^2$$

when eq. (4) is substituted in it.

i. e. $$x_m = \frac{h.\lambda}{g(h^2+\lambda^2)}\left\{(V^2 - g.h) + \sqrt{(V^2-g.h)^2 - g^2(h^2+\lambda^2)}\right\}. \quad (6)$$

And inversely the initial velocity corresponding to the known x_m is

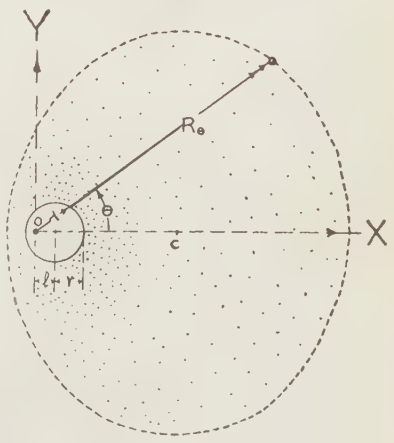
$$V^2 = \frac{g}{2h\lambda.x_m}\left\{h^2(x_m+\lambda)^2 + \lambda^2 x_m^2\right\} \quad (7)$$

which is very useful in the case of a bare atrio as that of Aso, since there is no other good means of estimating the initial velocity in such a case.

§ 6. The Form of the Distribution Area of Bombs from a Cylindrical Vent of any Form.

Now to derive the locus of maximum points in all azimuths, take the x-axis in the direction of the maximum value of λ, the distance of the wall-side from the pit, and the y-axis perpendicularly to it (Fig. 11). Let R_θ be the max. range in an azimuth-angle θ measured from the x-axis.

Fig. 11



If the form of the horizontal section of the vent be

$$\lambda = f(\theta), \quad (8)$$

we substitute this in eq. (6), and get

$$\left.\begin{aligned} R_\theta &= m.\ \frac{h(V^2 - g.h)f(\theta)}{g[h^2 + f^2(\theta)]} \\ \text{where} \qquad & \\ m &= 1 + \sqrt{1 - \frac{g^2[h^2 + f^2(\theta)]}{(V^2 - gh)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

This equation determines the form of the distribution-area of bombs.

The coefficient m is generally a function of θ, but in the following several important cases it is independent of θ and may be considered as a constant between 1 and 2.

1°). If V^2 is very great as compared with $g\sqrt{h^2+\lambda^2}$ and consequently the distribution area be very large, then $m \fallingdotseq 2$.

2°). If V^2 is very small and the distribution-area is so small that bombs can hardly pass over the vent rim, we have from eq. (5)

$$V^2 . g.h + g\sqrt{h^2+\lambda^2}$$

or $$(V^2 - g.h)^2 \fallingdotseq g^2(h^2+\lambda^2)$$

and therefore $m \fallingdotseq 1$.

3°). If the depth of the vent is very great compared with its breadth, we can neglect λ in comparison with h so that

$$m = 1 + \sqrt{1 - \frac{g^2 h^2}{(V^2 - gh)^2}}$$

which is independent of θ.

4°). If the vent be a circular cylinder of radius r, and the pit situates at the center of the vent-bottom, then

$$m = 1 + \sqrt{1 - \frac{g^2(h^2+r^2)}{(V^2 - gh)^2}}$$

which is also independent of θ.

§ 7. The Distribution Area of Bombs from a Circular Cylindrical Vent.

When the vent is a circular cylinder of radius r, and the pit is on the x-axis and distant $-l$ from the center of the vent-bottom, we have

$$\lambda = f(\theta) = l.\cos\theta + \sqrt{r^2 - l^2.\sin^2\theta}\ .$$

Substituting this in eq. (9),

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= m.\frac{h(V^2-g.h)[l.\cos\theta+\sqrt{r^2-l^2.\sin^2\theta}]}{g\{h^2+[l.\cos\theta+\sqrt{r^2-l^2.\sin^2\theta}]^2\}} \\ \text{where}\quad m &= 1+\sqrt{1-g^2.\frac{h^2+[l.\cos\theta+\sqrt{r^2-l^2\sin^2\theta}]^2}{(V^2-g.h)^2}} \end{aligned}\right\}, \quad (10)$$

and also $1 \leqq m \leqq 2$.

In many important cases as shown in the preceding article, the coefficient m may be taken as independent of θ.

The above eq. (10) denotes generally an elliptical form, but if m is independent of θ, it becomes an exact ellipse as indicated below. Rationalizing the denominator in (10), we have

$$R_0 = M.\frac{[h^2+r^2-l^2-2(r^2-l^2)].l\cos+(h^2+r^2-l^2)\sqrt{r^2-l^2+l^2.\cos^2\theta}}{(h^2+r^2-l^2)^2+4.h^2l^2.\cos^2\theta}$$

where

$$M = m.\frac{h(V^2-gh)}{g}. \quad (11)$$

Further, if we put

$$k = h^2+r^2-l^2,$$

then

$$R_0 = M.\frac{[k-2(r^2-l^2)]\,l.\cos\theta+k\sqrt{r^2-l^2+l^2.\cos^2\theta}}{k^2+4h^2l^2.\cos^2\theta}.$$

In order to transform this into rectangular coordinates, we write it as

$$\left\{R_0-\frac{M[k-2(r^2-l^2)].l.\cos\theta}{k^2+4h^2l^2\cos^2\theta}\right\}^2 = M^2\frac{k^2[(r^2-l^2)+l^2.\cos^2\theta]}{(k^2+4.h^2l^2.\cos^2\theta)^2}$$

or

$$R_0^2\{k^2.\sin^2\theta+(k^2+4h^2l^2)\cos^2\theta\} - 2M.[k-2(r^2-l^2)]lR_0\cos\theta - M^2(r^2-l^2)=0.$$

Putting here $x = R_0.\cos\theta$ and $y = R_0.\sin\theta$, we get

$$\frac{\left\{x-\frac{M[k-2(r^2-l^2)]l}{k^2+4h^2l^2}\right\}^2}{M^2\frac{(r^2-l^2)(k^2+4h^2l^2)+[k-2(r^2-l^2)]^2.l^2}{[k^2+4h^2l^2]^2}} + \frac{y^2}{M^2\frac{(r^2-l^2)(k^2+4h^2l^2)+[k-2(r^2-l^2)]^2l^2}{[k^2+4h^2l^2].k^2}} = 1.$$

i. e., $$\frac{(x-c)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1, \tag{12}$$

where

$$\left.\begin{aligned} c &= M.\frac{[h^2-(r^2-l^2)]l}{[h^2+r^2-l^2]^2+4h^2l^2} \\ A &= M.\frac{\sqrt{(r^2-l^2)[(h^2+r^2-l^2)^2+4h^2l^2]+[h^2-(r^2-l^2)]^2l^2}}{(h^2+r^2-l^2)^2+4h^2l^2} \\ B &= M\frac{\sqrt{(r^2-l^2)[(h^2+r^2-l^2)^2+4h^2l^2]+[h^2-(r^2-l^2)]^2.l^2}}{(h^2+r^2-l^2)\sqrt{(h^2+r^2-l^2)^2+4h^2l^2}} \\ \frac{A}{B} &= \frac{h^2+r^2-l^2}{\sqrt{(h^2+r^2-l^2)^2+4h^2l^2}}<1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Thus, when m and consequently M is independent of θ, the area of distribution must obviously be an ellipse whose center is at (c, o), and whose major semi-axis is B, and minor A. We will call this ellipse the "Distribution Ellipse". If we denote its eccentricity by e, then

$$e=\frac{2.hl}{\sqrt{(h^2+r^2-l^2)^2+4.h^2l^2}}. \tag{14}$$

The distribution ellipse will be more eccentric as h decreases. The greater h is in comparison with r, the smaller the eccentricity becomes, and the ellipse gradually approaches a circle.

Morever at a given vent (h and r given), the eccentricity must depend only on l, the deviation of the pit from the center, and not on V, the initial velocity.

Special cases.

1). If $l=0$, that is in the case of a "central activity", eqs. (10), (12) and (13) give

$$\left.\begin{aligned} R_0=A=B&=m.\frac{h(V^2-g.h).r}{g(h^2+r^2)} \\ c&=0 \end{aligned}\right\}. \tag{13'}$$

Therefore the distribution ellipse becomes a circle whose center coincides with that of the vent-bottom.

2). If $l=r$, that is in the case of a "wall-side activity", eq. (10) becomes

$$R_\theta = M - \frac{2r.\cos\theta}{h^2 + (2r)^2.\cos^2\theta}.$$

Transforming this into the rectangular coordinates,

$$\frac{(x-c)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

where

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minor radius} & A = m.\dfrac{h(V^2-gh)}{g}\cdot\dfrac{r}{h^2+4r^2} \\ \text{major radius} & B = m.\dfrac{V^2-gh}{g}\dfrac{r}{\sqrt{h^2+4r^2}} \\ \text{center of the ellipse} & c = A \end{array}\right\}. \qquad (13'')$$

and

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eccentricity} & e = \dfrac{2r}{\sqrt{h^2+4r^2}} \\ & B/A = \dfrac{\sqrt{h^2+4r^2}}{h} \end{array}\right\}. \qquad (14'')$$

Hence the distribution-area is an ellipse which touches the vent-rim above the pit and has the major axis in the y-direction.

At the Aso crater during 1928–1929, activity of this type happened very often; and especially in the great eruption after long repose, a definite change in the depth of vent-bottom was clearly perceived.

Let us consider such a case where the activity is of the "wall side type" and the depth of the vent differs at each outburst but its diameter does not change appreciably. At any two outbursts, if the depth of the vent and the eccentricity of the distribution-ellipse of bombs be h_1, e_1 and h_2, e_2 respectively, then from (14) the following relation between them must hold:—

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{e_1^2} - 1}{\frac{1}{e_2^2} - 1}} \qquad (15)$$

This expression can conveniently be used to estimate the variation in depth of the vent by the observation of the distribution-ellipse only.

III. Application of our Formulae to the Activity of Mt. Aso.

§ 8. The Activity on Nov. 4—7, 1929.

As the eruption of the fourth crater of Mt. Aso on 4–7 Nov. 1929 occurred in the dry season and after a short repose, it was very favourable in all respects for our present study and we could obtain reliable data.

In the greatest outbursts at 14^h on 6th Nov. 1929, a bomb weighing about 8 kgms. fell on Senri-ga-hama, south atrio (Fig. 8). It was ascertained to have $x_m \fallingdotseq 400^m$ by tape-measurement after the eruption ceased.

On 8th Nov. the depth and the diameter of the vent were measured by the tape and found to be

$$h \fallingdotseq 160^m, \quad 2r \fallingdotseq 30^m.$$

Red hot magma in the pit was actually witnessed at the north wall-side of the bottom, and therefore this eruption could certainly be regarded as a " wall-side activity ". The distribution of bombs is shown in Fig. 8. In the figure we notice that the area of distribution lay entirely southward from the vent. This can be said indeed to harmonise well with the position of the pit stated just above.

If we take $x_m = 400^m$ as the maximum range, we get from (7)

$$V = 115 \ m/\text{sec.},$$

i. e., the maximum initial velocity during the last activity of 1929 was perhaps in the order of about 120 m/sec.

At any rate, V^2 on this day was very great, and the activity was perhaps a case where we can take $m = 2$.

During this eruption the minimum initial velocity by which the bombs could hardly fly over the upper rim of the vent would be

$$V \fallingdotseq 58 \ m/\text{sec.},$$

assuming $x_m \fallingdotseq 30^m$ and $h \fallingdotseq 160^m$ in eq. (7).

Finally in this wall-side activity, eq. (14″) gives

$$c = \frac{2r}{\sqrt{h^2 + (2r)^2}} \fallingdotseq \frac{1}{6}, \quad \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{h^2 + 4r^2}}{h} \fallingdotseq \frac{33}{32}.$$

These numbers show that the eccentricity must be so small that in a reduced diagram of the distribution-area it will be difficult to perceive whether the boundary is a circle or an ellipse, and it may only be determined on the real ground by the surrounding states or actual

measurements. The sketch in Fig. 8 agrees very well with these statements.

§ 9. **The Eruption on 5—10 September 1930.**

This was the greatest eruption of those which the writer happened to witness, and is a suitable example which exhibited most clearly the distribution-ellipse of bombs. The distributions of bombs projected out by two outbursts on the 5th and the 8th are separately shown in Fig. 3, in which we find :—

Dates	Minor radius	Major radius
About 11^h, 5th Sept. 1930 (external)	$A_1 \fallingdotseq 360^m$	$B_1 \fallingdotseq 400^m$
About 13^h, 8th „ „ (internal)	$A_2 \fallingdotseq 160^m$	$B_2 \fallingdotseq 170^m$

As already stated, a mass of old ash and debris was still left at the east side of the vent bottom after the eruption on the 5th, and so the pit must have been located on the west wall-side, deviating a little to the south. Thus, this eruption also undoubtedly belongs to the wall-side type. Moreover the bottom of the vent on the 5th was obviously somewhat shallow, while on the 8th it was seen to be tolerably deep. These points agree with the fact that the distribution-area on the 5th was very eccentric while on the 8th it became very nearly a circle.

Applying eq. (15), we have

$$\frac{1}{c_1^2} - 1 = \frac{A_1^2}{B_1^2 - A_1^2} = \frac{360^2}{400^2 - 360^2}$$

$$\frac{1}{c_2^2} - 1 = \frac{A_2^2}{B_2^2 - A_2^2} = \frac{160^2}{170^2 - 160^2}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{360^2}{400^2 - 360^2} \cdot \frac{170^2 - 160^2}{160^2}} \fallingdotseq \frac{51}{61} \fallingdotseq \frac{100}{120}$$

These figures show that the outburst occurred at first at rather the upper part of the vent, but the bottom descended day by day till at last at about 13 o'clock on the 8th it became 1.2 times as deep as on the 5th.

Recherches sur le Degré de Grandeur d'une Certaine Intégrale Définie contenant un Paramètre ; leurs Applications aux Séries Entières et à l'Équation Différentielle Ordinaire

par

Hirosi Okamura

(Reçu le 4 Juillet, 1932)

Le présent mémoire se compose de trois parties.

Dans la première, nous donnons quelques théorèmes que nous croyons nouveaux sur le degré de grandeur d'une fonction représentée par une certaine intégrale définie contenant un paramètre, qui est une généralisation de la fonction Γ ou des séries de Dirichlet à coefficients réels et non négatifs. Nous établissons en outre une formule qui nous donne l'abscisse de convergence de l'intégrale étudiée.

Dans la deuxième partie, nous appliquons les résultats obtenus dans la première partie au cas particulier où notre intégrale se réduit à une série entière à coefficients non négatifs et obtenons la condition nécessaire et suffisante, à laquelle doivent obéir les coefficients, pour que la série soit infinie d'ordre non supérieur à celui d'une fonction donnée d'avance presque arbitrairement, quand on fait tendre la variable indépendante réelle vers l'extrémité positive de l'intervalle de convergence. Nous indiquons aussi la condition pour que la série soit dans ce cas infinie d'ordre égal ou inférieur. Nous apportons donc en quelque sorte une réponse au problème fondamental qui consiste à déterminer le mode de croissance d'une série entière, par ses coefficients supposés non négatifs, et vice versa[1].

La troisième et dernière partie forme une suite de notre mémoire antérieur[2] sur la méthode d'approximations successives de l'équation

1. *Voir*, pour le cas des fonctions entières, Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, p. 58 et p. 64.

2. Ces Memoirs, A **14**, p. 85 (1931).

différentielle ordinaire ; nous arrivons à montrer en appliquant les résultats de la première partie que l'approximation successive est convergente et cela en admettant hypothèse moins restrictive que dans le mémoire précédent. Le résultat nous fournit aussi une condition suffisante de l'unicité de la solution de l'équation, mais la condition ainsi obtenue peut être démontrée directement par une méthode simple qui ne fait que préciser la méthode de M. Tonelli[1] ou qui est une généralisation de la méthode que nous avons employée dans notre mémoire antérieur[2].

I. Théorèmes sur le degré de grandeur d'une certaine intégrale définie contenant un paramètre.

Soient $p(x)$ et $r(x)$ deux fonctions non négatives, finies et mesurables, d'une variable réelle x, définies dans un ensemble linéaire mesurable E, et considérons l'intégrale

$$F(n)=\int_E p(x)e^{nr(x)}\,dx$$

contenant un paramètre n. Les raisonnements que nous allons faire subsistent même si $p(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions de plusieurs variables définies dans un ensemble à plusieurs dimensions ; ce ne sont pas en effet des cas très différents, et nous nous bornerons au cas d'une seule variable. D'autre part on peut, si l'on veut, introduire la restriction de E borné, bien que nos raisonnements soient valables pour tous les cas, la transformation s'opérant par changement de variables.

Introduisons ici une hypothèse indispensable à notre théorie : $p(x)$ *est sommable dans tout sous-ensemble mesurable de* E *où* $r(x)$ *est bornée*, $r(x)$ n'étant pas nécessairement bornée dans E entier.

On peut alors distinguer trois cas : ou bien $F(n)$ est finie pour tout nombre réel n, ou elle ne l'est jamais quel que soit n, ou il y a un nombre réel N tel que $F(n)$ est finie pour $n<N$ et ne l'est pas pour $n>N$. Ceci est une conséquence de ce que l'expression à intégrer dans la formule de $F(n)$ est croissante par rapport à n. Convenons de dire que dans les deux premiers cas, on a respectivement $N=+\infty$ ou $N=-\infty$, et ainsi N est bien déterminé dans tous les cas. Au point $n=N$ il y a doute ; il peut arriver que $F(n)$ soit

1. Rendiconti della R. Academia Naz. dei Lincei, 6e série, **1**, p. 272 (1925).

2. Je n'avais pas eu connaissance de la méthode de M. Tonelli quand j'ai rédigé le mémoire.

finie ou infinie comme on le verra d'après le fait que $F(n)$ devient une série de Dirichlet si l'on prend pour $p(x)$ et $r(x)$ quelques fonctions particulières. Nous établirons à la fin de cette première partie une formule qui donne la valeur de ce nombre N.

Indiquons maintenant quelques propriétés fondamentales de la fonction $F(n)$.

Tout d'abord $F(n)$ est une fonction continue et croissante de n dans l'intervalle $-\infty < n < N$; sa dérivée $F'(n)$ est également continue et croissante dans le même intervalle. On a pour cette dérivée:

$$F'(n) = \int_E p(x) r(x) e^{nr(x)}\, dx.$$

Cette intégrale est de la même forme que $F(n)$, en substituant $p(x)r(x)$ à $p(x)$ dans $F(n)$. Son abscisse de convergence est aussi N. Il en est de même pour $F''(n)$, $F'''(n)$,..... .

Pour le démontrer, prenons deux nombres n et $n+\Delta n$ inférieurs à N; on a évidemment

$$\frac{F(n+\Delta n) - F(n)}{\Delta n} = \int_E p(x) r(x) e^{(n+\theta \Delta n) r(x)}\, dx,$$

θ étant une fonction de x, n et Δn, toujours comprise entre o et 1. On voit donc en prenant Δn positif que $p(x)r(x)e^{nr(x)}$ est sommable dans E pour $n < N$ et par conséquent, en passant à la limite, on obtient la formule de $F'(n)$ ci-dessus, grâce au théorème de M. Lebesgue. Inversement si l'intégrale du second membre dans la formule

$$F'(n) = \int_E p(x) r(x) e^{nr(x)}\, dx$$

est finie pour une certaine valeur de n, l'intégrale $F(n)$ l'est aussi pour la même valeur de n: on peut le voir en décomposant l'ensemble E en deux autres, dans l'un desquels on a $r(x) < 1$ et dans l'autre $r(x) \geqq 1$, et en appliquant à l'intégrale dans le premier ensemble l'hypothèse faite plus haut sur $p(x)$.

Il serait facile montrer d'ailleurs que $F(n)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan où la partie réelle de n est inférieure à N; mais nous laisserons de côté la démonstration.

Ceci posé, sauf le cas où $p(x)$ est presque partout nulle dans E et où $F(n)$ s'annule identiquement, la fonction $F(n)$ est toujours positive et croissante pour $n < N$, ainsi que la dérivée logarithmique $\frac{F'(n)}{F(n)}$. On a, en effet, pour $n < N$

$$F''(n)=\int_E p(x)\,[r(x)]^2 e^{nr(x)}\,dx$$

et

$$\left(\frac{F'(n)}{F(n)}\right)'=\frac{F(n)F''(n)-[F'(n)]^2}{[F(n)]^2}$$

$$=\frac{1}{[F(n)]^2}\left[\int_E p(x)e^{nr(x)}\,dx.\int_E p(x)[r(x)]^2 e^{nr(x)}\,dx\right.$$

$$\left.-\left(\int_E p(x)r(x)e^{nr(x)}\,dx\right)^2\right];$$

cette expression est positive ou nulle en vertu de l'inégalité de Schwarz. Elle s'annule et donc $\frac{F'(n)}{F(n)}$ n'est pas croissante au sens strict, seulement au cas où $r(x)$ est presque partout égale à une constante dans l'ensemble des points qui appartiennent à E et pour lesquels on a $p(x)\neq 0$.

Ainsi $\frac{F'(n)}{F(n)}$ croît avec n et a une limite finie ou infinie quand n tend vers N. Si N est fini et si la limite de $\frac{F'(n)}{F(n)}$ est également finie il faut que la limite de $F(n)$ le soit aussi, ce qui revient à dire, comme on sait, que $F(N)$ est également finie, et ce cas ne saurait rentrer dans notre étude sur l'ordre d'infinitude de $F(n)$. Si N est infini, le cas où la limite de $\frac{F'(n)}{F(n)}$ est finie rentre dans le cas où $r(x)$ est bornée dans l'ensemble des points pour lesquels $p(x)\neq 0$ moins un ensemble de mesure nulle. Ce cas correspond aux séries de Dirichlet ou aux séries entières à nombre limité de termes ; il peut se traiter aussi par notre méthode mais nous ne le ferons pas dans ce mémoire pour ne pas surcharger notre exposé. Par conséquent nous aurons surtout en vue dans les théorèmes suivants le cas où $\frac{F'(n)}{F(n)}$ tend vers $+\infty$.

Nous allons aborder maintenant notre étude sur le degré de grandeur de $F(n)$ quand on fait tendre n en croissant vers N. Nous donnerons tout d'abord quelques définitions préalables.

Comparons la croissance de $F(n)$ à celle d'une autre fonction donnée $e^{g(n)}$, où $g(n)$ est supposée, ainsi que sa dérivée $g'(n)$, fonction continue dans l'intervalle $N_0\leqq n<N_1$, N_1 pouvant être égale à $+\infty$. On suppose de plus que $g(n)$ et $g'(n)$ sont des fonctions croissantes au sens strict et tendent vers $+\infty$ quand n tend en croissant vers N_1. Il est inutile de faire N_1 différent de N si l'on connaît N grâce à des indications relatives à $p(x)$ et $r(x)$, mais nos théorèmes subsistent

dans tous les cas et nous apprennent de plus la relation qui existe entre N et N_1. Les hypothèses faites sur $g(n)$ ne seront pas trop restrictives d'après ce que nous venons de voir à propos de $F(n)$.

Considérons alors la fonction inverse de $y=g'(n)$ et désignons-la par $n=h(y)$. Si $g'(N_0)=Y_0$, $h(y)$ est une fonction continue et croissante dans l'intervalle $Y_0 \leqq y < +\infty$ et elle tend vers N_1 comme y tend vers $+\infty$.

Cela posé, envisageons maintenant l'intégrale

$$v=\int_y^{\bar{y}} [h(u)-h(y)]du,$$

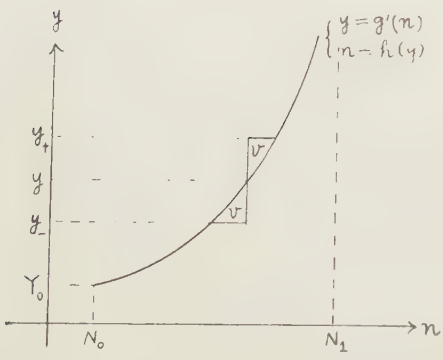
qui est manifestement une fonction de y et de $\bar{y}$ dans la région $Y_0 \leqq y$, $\bar{y} < +\infty$. Pour une valeur fixe de y dans cette région, l'intégrale v s'annule si $\bar{y}=y$ et croît constamment et indéfiniment quand $\bar{y}$ croît de y à $+\infty$; de même elle décroît avec $\bar{y}$ quand $\bar{y}$ décroît de y à Y_0. Elle ne prend une même valeur positive que pour deux valeurs de $\bar{y}$ au plus, dont l'une est supérieure et l'autre inférieure à y ; nous obtenons ainsi deux fonctions inverses $y_+(y, v)$ et $y_-(y, v)$ telles que

$$\int_y^{y_+(y, v)} [h(u)-h(y)]du = v, \qquad y_+(y, v) \geqq y,$$

et

$$\int_y^{y_-(y, v)} [h(u)-h(y)]du = v, \qquad y_-(y, v) \leqq y.$$

Fig. 1



On voit que la fonction $y_+(y, v)$ est bien définie dans le domaine $Y_0 \leqq y < +\infty$, $0 \leqq v < +\infty$; si l'on fixe v elle est une fonction continue et croissante de y dans l'intervalle $Y_0 \leqq y < +\infty$ et tend vers $+\infty$ avec y. La fonction $y_-(y, v)$, où nous considérons v comme une constante positive, est également continue et croissante par raport à y dans un certain intervalle $Y_1(v) \leqq y < +\infty$. Elle tend aussi vers $+\infty$ avec y, ce qui

est évident pour $N_1 = +\infty$ et est une conséquence de la condition $\lim_{n \to N_1} g(n) = +\infty$ pour N_1 fini.

Ces définitions étant établies, notre premier théorème s'énonce comme il suit :

Pour que l'on ait

$$N \geqq N_1$$

et

$$F(n) = O(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1)^1,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)] = O(1) \qquad (y \to +\infty),$$

l'expression I du premier membre désignant l'intégrale définie

$$\int p(x) e^{r(x)h[r(x)] - g\{h[r(x)]\}} dx$$

prise sur l'ensemble des points communs à E et à l'ensemble des points où l'inégalité entre crochets est satisfaite, M étant un nombre positif arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$F(n) = o(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)] = o(1) \qquad (y \to +\infty).$$

Remarquons que cette intégrale définie

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)]$$

a une valeur finie, en vertu de l'hypothèse faite plus haut sur $p(x)$, pour une valeur de y suffisamment grande et telle que la fonction $y_-(y, M)$ ait un sens d'après la definition précédente.

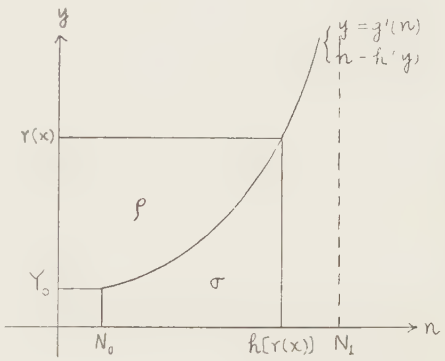
Remarquons en outre dans ce théorème et dans les deux théorèmes suivants on peut remplacer l'intégrale I par une autre intégrale J telle que

$$J = \int p(x) e^{\int_{r_0}^{r(x)} h(u) du} dx,$$

1. Par cette notation nous voulons dire que n tend vers N_1 *d'une façon continue*, en parcourant *toutes* les valeurs réelles inférieures à N_1. Nous adopterons la même convention dans la suite, partout où nous ne donnerons pas d'indications spéciales.

le domaine d'intégration étant le même. En effet, I et J ne diffèrent que par un facteur constant positif, puisque les exposants de e dans les expressions à intégrer sont égaux à une constante près, comme on peut le voir de la manière suivante. ρ, σ désignant respectivement les aires des domaines de la figure, on a

Fig. 2



$$\rho=\int_{Y_0}^{r(x)} h(u)du,$$

$$\sigma=\int_{N_0}^{h[r(x)]} g'(u)du=g\{h[r(x)]\}+\text{constante},$$

et

$$\rho+\sigma=r(x)h[r(x)]+\text{constante};$$

d'où l'on obtient

$$\int_{Y_0}^{r(x)} h(u)du=\rho=r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}+\text{constante}.$$

Démontrons maintenant le théorème.

On a

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}=\int_E \Psi(x,n)dx$$

en posant par définition

$$\Psi(x,n)=p(x)e^{nr(x)-g(n)}.$$

Dans cette expression si l'on donne à x une valeur prise dans E et telle que $r(x)\geqq Y_0$, et, si l'on regarde $\Psi(x,n)$ comme une fonction de la seule variable n dans l'intervalle $N_0\leqq n<N_1$, $\Psi(x,n)$ est maximum pour n tel que

$$r(x)-g'(n)=0$$

c'est-à-dire pour

$$n=h[r(x)].$$

En désignant la valeur correspondante de $\Psi(x, n)$ par $\psi(x)$, nous avons

$$\psi(x)=\Psi\{x,\ h[r(x)]\}=p(x)e^{r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}}.$$

Ceci n'étant que l'expression à intégrer dans la formule qui donne I et $\psi(x)$ prend une valeur bien détérminée pour les points de E pour lesquels on a $r(x)\geqq Y_0$.

Le rapport de $\Psi(x, n)$ à $\psi(x)$ est

$$e^{r(x)\{n-h[r(x)]\}-g(n)+g\{h[r(x)]\}}.$$

Si nous écrivons, dans l'exposant de cette expression, u au lieu de $r(x)$, nous obtenons une fonction de u et n

$$-\Omega(u, n)=u[n-h(u)]-g(n)+g[h(u)]$$

et la relation

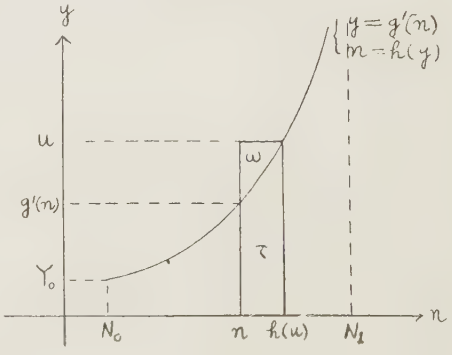
$$\Psi(x, n)=\psi(x)e^{-\Omega(r(x), n)}. \tag{1}$$

On peut démontrer comme dans la remarque précédente par des considérations géométriques la formule remarquable

$$\Omega(u, n)=\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du \tag{2}$$

pour $Y_0\leqq u<+\infty$, $N_0\leqq n<N_1$. On a, en effet, dans la figure ci-contre

Fig. 3



$$\omega=\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du,$$

$$\tau=\int_{n}^{h(u)}g'(u)du=g[h(u)]-g(n),$$

et

$$\omega+\tau=u[h(u)-n];$$

d'où l'on arrive à l'égalité annoncée

$$\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du=\omega=u[h(u)-n]-g[h(u)]+g(n).$$

Tous nos résultats découlent de ces deux formules (1) et (2).

Cherchons maintenant pour des valeurs assez grandes du paramètre n des deux bornes de l'intégrale

$$\int_E \Psi(x, n)dx,$$

et établissons deux inégalités qui nous permettrons de démontrer notre théorème.

En premier lieu nous avons évidemment

$$\int_E \Psi(x, n)dx \geqq \int_{[y_-(g'(n), M)<r(x)<y_+(g'(n), M)]} \Psi(x, n)dx$$

en supposant n assez grand pour que $y_-(g'(n), M)$ ait un sens. L'inégalité entre crochets, au-dessous du signe d'intégration du second membre, indique que le domaine d'intégration s'étend à tous les points de E satisfaisant à cette inégalité. Or dans ce dernier domaine d'intégration la fonction $\Omega(r(x), n)$ est comprise entre o et M en vertu de la formule (2) et des définitions de $y_-(g'(n), M)$ et de $y_+(g'(n), M)$. Donc d'après (1) nous pouvons écrire

$$\int_{[y_-(g'(n), M)<r(x)<y_+(g'(n), M)]} \Psi(x, n)dx \geqq e^{-M} \cdot \int_{[\,,\,]} \psi(x)dx$$

et finalement

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}} \geqq e^{-M} \cdot I[y_-(g'(n), M)<r(x)<y_+(g'(n), M)]. \tag{3}$$

D'autre part, décomposons le domaine d'intégration E en une infinité dénombrable de sous-ensembles de la manière suivante: Prenant un nombre Y non inférieur à Y_0 et un nombre n assez grand tel que l'on ait $g'(n) > Y$, nous allons établir une suite de valeurs entre Y et $+\infty$. Prenons d'abord un nombre $g'(n)$ et désignons-le par y_0; nous avons d'après (2)

$$\Omega(y_0, n) = 0.$$

Puis prenons successivement $y_1, y_2, \ldots\ldots$ de telle sorte que l'on ait

$$y_0 < y_1 < y_2 < \ldots\ldots$$

et

$$\Omega(y_i, n) = Mi \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots).$$

D'après (2) il est possible de déterminer $y_1, y_2, \ldots\ldots$ par ces conditions et cela d'une seule façon avec

$$\lim_{i \to +\infty} y_i = +\infty.$$

Définissons d'une manière analogue les nombres $y_{-1}, y_{-2}, \ldots\ldots, y_{-\lambda}$ par les conditions:

$$y_0 > y_{-1} > y_{-2} > \cdots\cdots > y_{-\lambda} > Y$$

et

$$\Omega(y_{-i}, n) = Mi \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, \lambda),$$

où nous supposons

$$M\lambda < \Omega(Y, n) \leqq M(\lambda + 1),$$

λ étant un certain entier dépendant de Y et n. Maintenant décomposons l'ensemble E en deux sous-ensembles $[r(x) \leqq Y]$ et $[Y < r(x)]$ et puis décomposons l'ensemble $[Y < r(x)]$ en une infinité dénombrable de sous-ensembles

$$[Y < r(x) \leqq y_{-\lambda}],\ [y_{-\lambda} < r(x) \leqq y_{-\lambda+1}],\ \ldots\ldots,\ [y_{-2} < r(x) \leqq y_{-1}],$$
$$[y_{-1} < r(x) < y_1],\ [y_1 \leqq r(x) < y_2],\ [y_2 \leqq r(x) < y_3],\ \ldots\ldots.$$

Convenant ici de désigner Y par $y_{-\lambda-1}$, nous avons en vertu des relations (1), (2) et du théorème de la moyenne de l'intégrale, les inégalités

$$\int_{[y_{-1} < r(x) < y_1]} \Psi(x, n)\,dx \leqq I[y_{-1} < r(x) < y_1]$$
$$= I[y_-(y_0, M) < r(x) < y_+(y_0, M)],$$

$$\int_{[y_i \leqq r(x) < y_{i+1}]} \Psi(x, n)\,dx \leqq e^{-Mi} \cdot I[y_i \leqq r(x) < y_{i+1}]$$
$$\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_i, M) < r(x) < y_+(y_i, M)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots\ldots),$$

et

$$\int_{[y_{-i-1} < r(x) \leqq y_{-i}]} \Psi(x, n)\,dx \leqq e^{-Mi} \cdot I[y_{-i-1} < r(x) \leqq y_{-i}]$$
$$\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_{-i}, M) < r(x) < y_+(y_{-i}, M)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, \lambda).$$

En ajoutant ces inégalités nous avons donc finalement pour des valeurs de Y et n telles que $Y \geqq Y_0$ et $g'(n) > Y$

$$\int_{[Y < r(x)]} \Psi(x, n)\,dx \leqq \sum_{i=1}^{\lambda} e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_{-i}, M) < r(x) < y_+(y_{-i}, M)]$$
$$+ I[y_-(y_0, M) < r(x) < y_+(y_0, M)]$$
$$+ \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_i, M) < r(x) < y_+(y_i, M)], \tag{4}$$

y_0 étant égale à $g'(n)$ et la suite $y_{-\lambda}, y_{-\lambda+1}, \ldots\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\ldots$, qui se détermine dépendant de Y et de n, étant telle que

$$Y < y_{-\lambda} < y_{-\lambda+1} < \ldots\ldots < y_{-1} < y_0 < y_1 < \ldots\ldots \to +\infty.$$

Au moyen des inégalités (3) et (4), nous allons pouvoir achever complètement la démonstration. Si $\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$ est borné et inférieur à γ quand n est assez voisin de N_1, l'inégalité (3) montre que $I[y_-(y,M) < r(x) < y_+(y,M)]$ est inférieur à $e^M \cdot \gamma$ pour y assez grand. D'autre part nous avons

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}} = \int_E \Psi(x,n)dx = \int_{[r(x) \leqq Y]} \Psi(x,n)dx + \int_{[Y < r(x)]} \Psi(x,n)dx$$

et le premier terme du troisième membre tend vers zéro quand n augmente vers N_1 en vertu de l'hypothèse faite sur $p(x)$ au début de cette partie et du fait que $e^{nr(x)-g(n)}$ tend uniformément vers zéro dans le domaine d'intégration de cette intégrale. Par conséquent si $I[y_-(y,M) < r(x) < y_+(y,M)]$ est borné et inférieur à δ pour une valeur assez grande de y, nous savons par l'inégalité (4) que, pour une valeur assez grande de Y, $\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$ est borné et inférieur è $\varepsilon + \frac{1+e^M}{1-e^M}\delta$, ε étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut, pour n assez voisin de N_1. D'ailleurs si l'une des deux expressions $\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$ et $I[y_-(y,M) < r(x) < y_+(y,M)]$ tend vers zéro, il en est de même de l'autre.

(C. q. f. d.)

Dans la démonstration du théorème précédent nous avons supposé que n variait d'une manière continue et nous avons considéré la limite de $F(n)$. Mais l'inégalité (3) nous donne aussi notre deuxième théorème qui nous sera utile dans la troisième partie :

Si la variable n ne prend que des valeurs appartenant à un ensemble $\{\bar{n}\}$ et tend vers N_1 en passant par toutes les valeurs de $\{\bar{n}\}$ inférieures à N_1 et si l'on a alors

$$F(n) = O(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1),$$

N_1 étant inférieur ou égal à N, on a nécessairement

$$I[y_-(g'(n), M) < r(x) < y_+(g'(n), M)] = O(1) \qquad (n \to N_1),$$

n tendant vers N_1 de la manière indiquée, et M étant nombre constant positif arbitraire.

Si l'on a de plus

$$F(n)=o(e^{g(n)}) \qquad (n\to N_1),$$

on a nécessairement

$$I[y_-(g'(n), M)<r(x)<y_+(g'(n), M)]=o(1) \qquad (n\to N_1),$$

n tendant vers N_1 toujours de la manière indiquée.

Passons maintenant à notre troisième théorème, qui nous paraît très important.

Pour que l'on ait

$$N_1=N$$

et que le rapport

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives lorsque la variable n croît vers N_1, il faut et il suffit que l'intégrale

$$I[y_-(y, M)<r(x)<y_+(y, M)]$$

ait des limites d'indétermination finies et positives quand y augmente indéfiniment, en prenant pour la constante positive M des valeurs assez grandes,

Le résultat du premier théorème et l'inégalité (3) suffisent à établir que la condition est suffisante. Nous allons prouver qu'elle est nécessaire.

Soient en effet

$$A=\varliminf_{n\to N_1}\frac{F(n)}{e^{g(n)}} \quad \text{et} \quad B=\varlimsup_{n\to N_1}\frac{F(n)}{e^{g(n)}},$$

A, B étant supposées finies et positives.

Nous allons généraliser l'inégalité (4) par un raisonnement légèrement différent de celui qui nous a permis de l'établir. Pour déterminer y_i et y_{-i} $(i\geqq 2)$ nous poserons maintenant

$$\Omega(y_{\pm i}, n)=M+(i-1)M_1,$$

M_1 étant un nombre positif fixe qui a été pris antérieurement égal à M. Or nous aurons, pour des nombres Y et n tels que $Y\geqq Y_0$ et $g'(n)>Y$,

$$\int_{[Y<r(x)]} \Psi(x, n)dx \leqq \sum_{i=1}^{\lambda} e^{-M-(i-1)M_1}. I[y_-(y_{-i}, M_1)<r(x)<y_+(y_{-i}, M_1)]$$

$$(5) \qquad + I[y_-(y_0, M)<r(x)<y_+(y_0, M)]$$

$$+ \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-M-(i-1)M_1}. I[y_-(y_i, M_1)<r(x)<y_+(y_i, M_1)],$$

où y_0 est égal à $g'(n)$ et la suite $y_{-\lambda}, y_{-\lambda+1}, \ldots\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\ldots$, qui se détermine dépendant de Y et de n, est telle que l'on ait

$$Y<y_{-\lambda}<y_{-\lambda+1}<\ldots\ldots<y_{-1}<y_0<y_1<y_2<\ldots\ldots\rightarrow+\infty.$$

Dans ce cas l'inégalité (3) nous donne d'abord pour y assez grand

$$I[y_-(y, M_1)<r(x)<y_+(y, M_1)]<e^{M_1}.(B+\varepsilon),$$

ε étant un nombre positif arbitraire. Nous avons donc en vertu de (5) pour y assez grand

$$A-\varepsilon<I[y_-(y, M)<r(x)<y_+(y, M)]+2(B+\varepsilon)\frac{e^{M_1}-M}{1-e^{-M_1}}.$$

Ceci montre que si l'on prend ε assez petit et M assez grand la limite inférieure de $I[y_-(y, M)<r(x)<y_+(y, M)]$ pour $y\rightarrow+\infty$ est positive ; et la limite supérieure est finie d'après le premier théorème. (C. q. f. d.)

Dans le théorème précédent on doit prendre M assez grand ; il suffit que l'on ait

$$M>\log\frac{8B}{A},$$

comme le montre l'inégalité précédente en posant $M_1=\log 2$ et en faisant ε assez petit.

Remarquons enfin que dans les énoncés des théorèmes précédents nous pouvons écrire

$$I[y_-(y, M')<r(x)<y_+(y, M'')]$$

au lieu de

$$I[y_-(y, M)<r(x)<y_+(y, M)]$$

en supposant que M' et M'' sont des fonctions de y telles que les quatre limites

$$\underline{\lim_{y\rightarrow+\infty}} M'(y), \qquad \overline{\lim_{y\rightarrow+\infty}} M'(y),$$

$$\underline{\lim_{y\rightarrow+\infty}} M''(y), \qquad \overline{\lim_{y\rightarrow+\infty}} M''(y)$$

soient toutes finies et positives, et de plus suffisamment grandes dans le troisième théorème. Pour nous en assurer, il suffit d'appliquer nos théorèmes un certain nombre de fois en choisissant M convenablement et en s'appuyant sur le fait que les fonctions $y_+(y, v)$ et $y_-(y, v)$ sont respectivement croissante et décroissante par rapport à v.

Pour terminer cette première partie démontrons la formule qui nous donne l'abscisse de convergence N de notre intégrale $F(n)$. La formule cherchée est, comme on peut le supposer par analogie avec la série de Dirichlet,

$$N = \overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\log\left(\int_{[y \leqq r(x) \leqq y+M]} p(x)\,dx\right)}{-y},$$

où M est un nombre positif arbitraire mais fixe et où l'on considère $\log 0$ ayant un sens tel que $\log 0 = -\infty$.

En supposant en effet que la valeur N donnée par cette formule ne soit pas infinie, si nous prenons un nombre N' plus grand que N, nous avons pour une certaine valeur de y aussi grande que l'on veut

$$N' > \frac{\log\left(\int_{[y \leqq r(x) \leqq y+M]} p(x)\,dx\right)}{-y},$$

et par conséquent

$$e^{N'y} \cdot \int_{[y \leqq r(x) \leqq y+M]} p(x)\,dx > 1,$$

d'où l'on a si $N' \geqq 0$

$$\int_{[y \leqq r(x) \leqq y+M]} p(x) e^{N' r(x)}\,dx > 1$$

et si $N' < 0$

$$\int_{[y \leqq r(x) \leqq y+M]} p(x) e^{N' r(x)}\,dx > e^{N'M}.$$

Dans tous les cas, on peut prendre y de plus en plus grand, les domaines d'intégration étant distincts. Donc l'intégrale

$$\int_E p(x) e^{N' r(x)}\,dx$$

ne saurait être finie.

Réciproquement si N'' est un nombre inférieur à N donné par la formule, nous avons pour y suffisamment grand

$$N''+\varepsilon<\frac{\log\left(\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)dx\right)}{-y},$$

ε étant un nombre positif. Il s'ensuit

$$e^{(N''+\varepsilon)y}\cdot\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)dx<1$$

et, en considérant séparément les deux cas $N''\geqq 0$ et $N''<0$ comme plus haut, nous obtenons

$$\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)e^{N''r(x)}dx<\eta e^{-\varepsilon y}$$

η étant un certain nombre positif. En posant $y+M$, $y+2M$,..... au lieu de y nous avons

$$\int_{[y+iM\leqq r(x)\leqq y+(i-1)M]}p(x)e^{N''r(x)}dx<\eta e^{-\varepsilon y-i\varepsilon M}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

La somme des seconds membres est finie et par conséquent la somme des premiers membres ou l'intégrale

$$\int_{[y\leqq r(x)]}p(x)e^{N''r(x)}dx$$

l'est aussi. D'autre part grâce à l'hypothèse faite sur $p(x)$ au début de cette partie l'intégrale

$$\int_{[r(x)<y]}p(x)e^{N''r(x)}dx$$

est finie. En faisant la somme de ces deux intégrales on en conclut que $F(N'')$ est finie. (C. q. f. d.)

II. Applications des théorèmes précédents à l'étude de la croissance des séries entières à coefficients non négatifs.

Comme cas particulier des théorèmes de la première partie, prenons pour E l'intervalle $0\leqq x<+\infty$ et définissons les fonctions $p(x)$ et $r(x)$ de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned}p(x)&=a_i,\\ r(x)&=l_i\end{aligned}\right\}\quad(i\leqq x<i+1)\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots),$$

où a_i et l_i ($i=0, 1, 2, \ldots\ldots$) sont des nombres non négatifs. Supposons de plus

$$\lim_{i\to+\infty} l_i = +\infty.$$

Les fonctions $p(x)$ et $r(x)$ remplissent alors les conditions posées dans la première partie. Nous obtenons ainsi

$$F(n)=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i e^{l_i n}$$

qui est une série de Dirichlet à coefficients non négatifs.

Le premier et le troisième théorème de la première partie deviennent avec les mêmes hypothèses et les mêmes définitions relatives à la fonction $g(n)$.

Pour que l'abscisse de convergence de N de la série de Dirichlet étudiée $F(n)$ ne soit pas supérieur à N_1 et que l'on ait de plus

$$F(n)=O(e^{g(n)}) \qquad (n\to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,M)<l_i<y+(y,M)]} a_i b_i = O(1) \qquad (y\to+\infty),$$

en posant

$$b_i = e^{l_i h(l_i)-g[h(l_i)]};$$

l'inégalité au-dessous du signe $\sum$ signifiant que la sommation doit s'étendre à tous les termes satisfaisant à cette inégalité, M étant un nombre positif arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$F(n)=o(e^{g(n)}) \quad (n\to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,M)<l_i<y+(y,M)]} a_i b_i = o(1) \qquad (y\to+\infty).$$

En outre pour que l'on ait $N=N_1$ et que le rapport

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives pour $n\to N_1$, il faut et il suffit que les limites d'indétermination de

$$\sum_{[y-(y,M)<l_i<y+(y,M)]} a_i b_i \qquad (y\to+\infty)$$

soient finies et positives, $\overline{M}$ étant pris assez grand.

Les séries les plus intéressantes qui se réduisent par simple transformation à des séries de cette espèce sont les séries entières obtenues en posant

$$l_i = i$$

et en substituant $\log z$ à la variable n. Soit

$$G(z) = F(\log z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

Le théorème précédent nous permet de conclure le théorème suivant.

Pour qu'une série entière à coefficients non négatifs $G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ *soit convergente pour* $|z| < e^{N_1}$ *et que l'on ait*

$$G(z) = O(e^{g(\log z)}) \qquad (z \to e^{N_1}),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y_-(y, M) < i < y_+(y, M)]} a_i b_i = O(1) \qquad (y \to +\infty),$$

en posant

$$b_i = e^{g[h(i)] - g[h(i)]},$$

M étant un nombre positif arbitraire mais fixe.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z) = o(e^{g(\log z)}) \qquad (z \to e^{N_1}),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y_-(y, M) < i < y_+(y, M)]} a_i b_i = o(1) \qquad (y \to +\infty).$$

De plus pour que le rayon de convergence de la série entière $G(z)$ soit égale à e^{N_1} et que le rapport

$$\frac{G(z)}{e^{g(\log z)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives pour $z \to e^{N_1}$, il faut et il suffit que les limites d'indétermination de

$$\sum_{[y_-(y, \overline{M}) < i < y_+(y, \overline{M})]} a_i b_i \qquad (y \to +\infty)$$

soient finies et positives, M étant pris assez grand.

Comme application de ce théorème, posons

$$g(\log z) = C z^R$$

ou

$$g(n) = Ce^{Rn},$$

C, R étant des nombres positifs constants. On a alors

$$g'(n) = CRe^{Rn};$$

$g'(n)$ est une fonction continue et croissante augmentant indéfiniment avec n ; la fonction $g(n)$ remplit donc la condition requise dans l'énoncé précédente si l'on fait $N_1 = +\infty$. On a évidemment

$$h(y) = \frac{1}{R} \log \frac{y}{CR},$$

et par conséquent

$$M = \int_y^{\bar{y}} [h(u) - h(y)]\,du = \frac{1}{R} \int_y^{\bar{y}} \log \frac{u}{y}\,du$$

$$= \frac{\bar{y}}{R} \left(\frac{\bar{y}}{y} \log \frac{\bar{y}}{y} - \frac{\bar{y}}{y} + 1 \right).$$

Cette expression donne la valeur de M, en désignant $y_+(y, M)$ ou $y_-(y, M)$ par $\bar{y}$; on peut alors considérer M comme une fonction de y ayant une limite finie et positive, qui n'est pas nécessairement une constante, comme nous l'avons remarqué après la démonstration du troisième théorème de la première partie. Or, nous avons

$$\frac{\bar{y}}{y} \to 1$$

et, en posant $\bar{y} = y + \Delta y$, on a

$$\frac{\Delta y}{y} \to 0.$$

Par suite notre expression de M devient

$$\frac{y + \Delta y}{R} \left[\left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) \log \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) - \frac{\Delta y}{y} \right];$$

cette expression est asymptotiquement égale à

$$\frac{1}{2R} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{y}.$$

Donc nous pouvons écrire $y + \varkappa_1 \sqrt{y}$ ou $y - \varkappa_1 \sqrt{y}$, $\varkappa$ étant un nombre positif arbitraire mais fixe, au lieu de $y_+(y, M)$ ou $y_-(y, M)$ dans l'énoncé précédent ; il suffit de faire $\varkappa$ suffisamment grand au lieu de

$\overline{M}$ dans la troisième partie de l'énoncé. D'ailleurs, un raisonnement simple suffirait à établir que nous pouvons remplacer l'inégalité

$$y - x_1 \sqrt{y} < i < y + x_1 \sqrt{y}$$

par cette autre :

$$y < i < y + K_1 \sqrt{y} ,$$

où K est un nombre positif quelconque que l'on doit prendre assez grand dans la troisième partie du théorème. Nous arrivons ainsi au résultat suivant.

Pour que la série entière à coefficients non négatifs $G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ *représente une fonction entière et que l'on ait de plus*

$$G(z) = O(e^{Cz^R}) \qquad (z \to +\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y < i < y + K\sqrt{y}]} a_i C^{\frac{i}{R}} \log^{\frac{i}{CR}} - \frac{i}{R}$$

$$= \sum_{[y < i < y + K\sqrt{y}]} a_i \left(\frac{i}{CRe} \right)^{\frac{i}{R}} = O(1) \qquad (y \to +\infty),$$

K étant une constante positive arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z) = o(e^{Cz^R}) \qquad (z \to +\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y < i < y + K\sqrt{y}]} a_i \left(\frac{i}{CRe} \right)^{\frac{i}{R}} = o(1) \qquad (y \to +\infty).$$

En outre, pour que les limites d'indétermination de

$$\frac{G(z)}{e^{Cz^R}} \qquad (z \to +\infty)$$

soient finies et positives toutes les deux, il faut et il suffit que pour un nombre positif $\overline{K}$ assez grand, les deux limites de

$$\sum_{[y < i < y + \overline{K}\sqrt{y}]} a_i \left(\frac{i}{CRe} \right)^{\frac{i}{R}} \qquad (y \to +\infty)$$

soient finies et positives.

Ce résultat permet de déduire les formules connues qui donnent

l'ordre et le type d'une fonction entière au moyen des coefficients de la série de Taylor correspondante. Mais dans le cas présent, nous avons supposé que les coefficients étaient positifs ou nuls, et le résultat que nous avons obtenu est de nature beaucoup plus précise que ceux que l'on obtiendrait par cette seconde méthode.

Indiquons encore une autre application simple.

Soient

$$g(u)=Hu^2, \qquad g'(u)=2Hu,$$

H étant un nombre positif. Ces fonctions satisfont évidemment à notre condition. On a alors

$$h(y)=\frac{y}{2H}$$

et

$$y_+(y, M)=y+2\sqrt{HM}, \qquad y_-(y, M)=y-2\sqrt{HM}.$$

Si l'on prend donc M assez petit et $4\sqrt{HM}$ inférieur à 1, on a la proposition suivante.

Pour qu'une série entière $G(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_iz^i$ *à coefficients non négatifs représente une fonction entière et que l'on ait de plus*

$$G(z)=O(z^{H\log z}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$a_i=O(e^{-\frac{i^2}{H}}) \qquad (i\to+\infty),$$

H désignant un nombre positif quelconque.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z)=o(z^{H\log z}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$a_i=o(e^{-\frac{i^2}{H}}) \qquad (i\to+\infty).$$

Pour terminer cette deuxième partie, remarquons que notre théorie ne nous permet pas de reconnaître si la limite de

$$\frac{G(z)}{e^{g(\log z)}} \qquad (z\to e^{N_1})$$

ou plus généralement de

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}} \qquad (n \to N_1)$$

est bien déterminée ou non. Nous espérons pouvoir plus tard donner une réponse à ce problème.

III. Sur la méthode d'approximations successives de l'équation différentielle ordinaire.

Dans cette troisième partie, nous nous proposons tout d'abord d'appliquer des résultats obtenus dans la première partie à la démonstration d'un théorème qui se réduit au cas particulier de la première partie où $e^{g(n)}$ est égal asymptotiquement à $n!$. Nous appliquerons ensuite ce théorème à la méthode d'approximations successives de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre.

L'ensemble E et les fonctions $p(x)$, $r(x)$, $F(n)$ étant les mêmes que dans la première partie, nous écrirons cette fois $q(x)$ au lieu de $e^{r(x)}$. Nous avons alors

$$F(n) = \int_E p(x)[q(x)]^n dx.$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

Pour que l'intégrale $F(n)$ soit finie pour tout n fini, et que l'on ait

$$F(n) = O(n!)$$

quand n tend vers $+\infty$ en parcourant tous les nombres entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]} p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx = O(1) \qquad (z \to +\infty),$$

K étant un nombre positif fixe arbitraire.

De plus pour que l'on ait alors

$$F(n) = o(n!),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]} p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx = o(1) \qquad (z \to +\infty).$$

Notre démonstration va s'appuyer sur les deux premiers théorèmes de la première partie. Opérons le changement de variable

$$y=\log z,$$

et posons

$$h(\log z)=k(z).$$

Si nous désignons respectivement $e^{y+(\log z, M)}$ et $e^{y-(\log z, M)}$ par $z_+(z)$ et $z_-(z)$, M étant supposé être une fonction de y ou z tendant vers un nombre positif fini lorsque y ou z tend vers $+\infty$, $z_+(z)$ et $z_-(z)$ sont déterminés par les relations

$$\int_z^{z_+(z)}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}=M, \qquad z_+(z)>z\,;$$

et

$$\int_z^{z_-(z)}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}=M, \qquad z_-(z)<z.$$

Nous pouvons remplacer dans notre théorème $n!$ par la fonction $e^{g(n)}$ où

$$g(n)=n\log n-n+\frac{1}{2}\log n$$

d'après la formule de Stirling. Sa dérivée

$$g'(n)=\log n+\frac{1}{2n}$$

est continue et croissante pour $n\geqq\frac{1}{2}$ et par suite cette fonction $g(n)$ répond à la condition requise dans la première partie, si nous supposons $N_1=+\infty$.

Cela posé, la fonction $n=k(z)$ est définie par la relation

$$z=e^y=e^{g'(n)}$$

ou

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{2n}}.$$

Résolvons par rapport à $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{3}{8z^3}+\cdots\cdots,$$

et ainsi pour z suffisamment grand

$$k(z)=n=z\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{3}{8z^2}+\dots\right)^{-1}$$

$$=z\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}+\dots\dots\right).$$

Pour évaluer l'intégrale précédente, écrivons $z+\Delta z$ au lieu de $z_+(z)$ ou $z_-(z)$; nous obtenons :

$$\int_z^{z+\Delta z}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}$$

$$=\left[z-\frac{1}{2}\log z+\frac{1}{8z}+\dots\right]_z^{z+\Delta z}-z\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}+\dots\right)\log\frac{z+\Delta z}{z}$$

$$=z\left[\frac{\Delta z}{z}-\left(1-\frac{1}{8z^2}+\dots\right)\log\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)\right]+\dots\dots,$$

en supprimant la partie infinitésimale par rapport à z grand. La partie entre crochets [ ] doit être infinitésimale, et par conséquent il faut que $\frac{\Delta z}{z}$ tend vers zéro quel que soit le signe de Δz. Donc l'intégrale cherchée sera asymptotiquement égale à

$$\frac{(\Delta z)^2}{2z}$$

et il suffit de prendre $\Delta z=\pm x_1\sqrt{z}$ pour la faire tendre vers un nombre positif fini, x étant un nombre positif quelconque.

Nous obtenons ainisi au moyen du premier théorème de la première partie la condition suffisante dans le cas présent :

$$I[\log(z-x_1\sqrt{z})<r(x)<\log(z+x_1\sqrt{z})]$$

$$=I[z-x_1\sqrt{z}<q(x)<z+x_1\sqrt{z}]=O(1)\text{ ou }o(1)\qquad(z\to+\infty),$$

selon les cas, x_1 étant un nombre positif arbitraire ; et nous obtenons au moyen du deuxième théorème de la première partie, la condition nécessaire

$$I[e^{g'(n)}-x_2\sqrt{e^{g'(n)}}<q(x)<e^{g'(n)}+x_2\sqrt{e^{g'(n)}}]=O(1)\quad\text{ou}\quad o(1),$$

quand n tend vers $+\infty$ en parcourant seulement la suite des nombres entiers, x_2 étant aussi un nombre positif arbitraire. Ces deux conditions montrent que si l'on a $x_1<K<x_2$ la condition nécessaire et suffisante est que

$$I[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]=O(1)\text{ ou }o(1)\qquad(z\to+\infty),$$

z tendant vers $+\infty$ d'une façon continue et prenant toutes les valeurs réelles. D'ailleurs, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ étant arbitraires, K est aussi arbitraire.

Pour démontrer que cette condition est nécessaire, remarquons que $e^{g'(n)}$ croît indéfiniment avec n mais que le rapport des valeurs consecutives $\frac{e^{g'(n+1)}}{e^{g'(n)}}$ tend vers 1 pour n infini. Par conséquent, si nous faisons correspondre à chaque valeur de la variable z un entier n tel que $e^{g'(n)}$ soit le plus voisin de z, cet entier n grandit indéfiniment avec z et la valeur correspondante de $e^{g'(n)}$ devient asymptotiquement égale à z. Donc pour des valeurs suffisamment grandes de z et de n, l'ensemble $[e^{g'(n)}-\varkappa_2\sqrt{e^{g'(n)}}<q(x)<e^{g'(n)}+\varkappa_2\sqrt{e^{g'(n)}}]$ contient évidemment l'ensemble $[z<q(x)<z+K_1\sqrt{z}]$. Par suite on en conclut que la condition est nécessaire. On verrait encore plus facilement que la condition est suffisante, et nous n'insisterons pas sur ce point.

Cela posé, il nous reste pour achever notre démonstration, à calculer l'intégrale I. Nous pouvons supprimer tout facteur de l'expression à intégrer qui tend vers une limite finie et positive. Dans l'expression à intégrer pour obtenir I l'exposant de e est

$$
\begin{aligned}
&r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}\\
&=\log q(x).\,h[q(x)]-g\{h[q(x)]\}\\
&=\log q(x).\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\cdots\cdots\right)\\
&-\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\cdots\cdots\right)\log\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\cdots\cdots\right)\\
&+\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\cdots\cdots\right)-\frac{1}{2}\log\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\cdots\cdots\right)\\
&=\log q(x).\,q(x)-\frac{1}{2}\log q(x)+\cdots\cdots\\
&-\left(q(x)-\frac{1}{2}\right)\log q(x)+\cdots\cdots+q(x)+\cdots\cdots-\frac{1}{2}\log q(x)+\cdots\cdots\\
&=q(x)-\frac{1}{2}\log q(x)+\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

en supprimant la partie qui a une limite finie et déterminée pour $q(x)\to+\infty$. Nous arrivons ainsi à la condition

$$\int_{[z<q(x)<z+K_1\sqrt{z}]}p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx=O(1)\quad\text{ou}\quad o(1)\qquad(z\to+\infty).$$

(C. q. f. d.)

Nous allons établir maintenant, en nous appuyant sur ce théorème, quelques propositions qui nous aiderons dans la méthode d'approximations successives.

Soient $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ deux fonctions non négatives définies dans l'intervalle $\alpha < x \leqq_i \beta$ et sommable dans l'intervalle $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta$ pour tout α_1 tel que $\alpha < \alpha_1 \leqq_i \beta$. Soit $\nu(x)$ une fonction primitive de $\nu'(x)$ et également définie dans l'intervalle $\alpha < x \leqq_i \beta$.

Déterminons une suite infinie de fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots\ldots$$

par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \int_\alpha^x \varphi'(t)\,dt, \\ \varphi_{i+1}(x) = \int_\alpha^x \varphi_i(t)\nu'(t)\,dt \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots) \end{cases}$$

Cela n'est pas toujours possible ; mais si l'on a défini $\varphi_i(x)$ pour une certaine valeur de x telle que $\alpha < x \leqq_i \beta$, au moyen des i premières formules, il est de même pour une valeur quelconque de x dans l'intervalle $\alpha < x \leqq_i \beta$, et la fonction $\varphi_i(x)$ est définie par l'égalité

$$(7)\qquad \varphi_i(x) = \int_\alpha^x \varphi'(t)\ \frac{[\nu(x) - \nu(t)]^i}{i!}\,dt,$$

l'intégrale du second membre ayant alors une valeur finie. Réciproquement si cette intégrale a une valeur finie pour une certaine valeur de x telle que $\alpha < x \leqq_i \beta$, il en est de même pour toute valeur de x telle que $\alpha < x \leqq_i \beta$ et il existe une fonction $\varphi_i(x)$, telle qu'elle est définie en (6) et satisfaisant à l'égalité (7). Nous avons déjà démontré l'égalité (7) pour le cas où $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ sont sommables dans l'intervalle $\alpha < x \leqq_i \beta$ tout entier ; pour la démontrer dans le cas général il suffit de remplacer $\varphi'(x)$ par la fonction $\Phi(x, \alpha_1)$ contenant un paramètre α_1, et telle que

$$\Phi(x, \alpha_1) = \begin{cases} 0 & (\alpha < x < \alpha_1), \\ \varphi'(x) & (\alpha_1 \leqq x \leqq \beta), \end{cases}$$

le paramètre α_1 tendant vers α par valeurs décroissantes.

L'existence et la limite de la suite $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots\ldots$ de (6) dépendent donc de celles de l'intégrale du second membre de (7), et cette intégrale appartient à l'espèce d'intégrales que nous avons traitées

au début de cette troisième partie. L'ensemble E est maintenant l'intervalle $\alpha<t\leqq x$, et l'on a respectivement

$$N_1=+\infty,\ n=i,\ p(t)=\varphi(t),\ q(t)=e^{r(t)}=\nu(x)-\nu(t),$$

x étant un paramètre. Nous avons supposé précédemment que $r(t)\geqq 0$ et $q(t)\geqq 1$, tandis qu'ici nous avons seulement $q(t)\geqq 0$; mais cela n'empêche rien d'appliquer le théorème au cas présent, et nous pouvons trouver la condition nécessaire et suffisante de l'existence de la suite $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..... tendant vers zéro quand i augmente jusqu'à $+\infty$. Dans le cas où $\nu'(x)$ est sommable dans l'intervalle $\alpha<x\leqq\beta$ tout entier, la condition cherchée est évidemment que $\varphi'(x)$ soit sommable dans $\alpha<x\leqq\beta$; donc laissant ce cas de côté nous supposerons dorénavant que

$$\lim_{x\to\alpha+0}[-\nu(x)]=+\infty.$$

Le théorème précédent nous montre tout d'abord que pour que toutes les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..... existent et que l'on ait

$$\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(x)=0$$

en un point x tel que $\alpha<x\leqq\beta$, il faut et il suffit que

$$\lim_{t_0\to\alpha+0}\int_{t_1}^{t_0}\varphi'(t)\frac{e^{\nu(x)-\nu(t)}}{\sqrt{\nu(x)-\nu(t)}}dt=0,$$

t_0 étant pris au voisinage de α et t_1 étant la plus petite valeur pour laquelle on ait

$$\nu(x)-\nu(t_1)=\nu(x)-\nu(t_0)+K\sqrt{\nu(x)-\nu(t_0)},$$

K étant un nombre positif arbitraire.

Nous pouvons remplacer cette condition par l'expression

$$\lim_{t_0\to\alpha+0}\int_{t_1}^{t_0}\varphi'(t)\frac{e^{-\nu(t)}}{\sqrt{-\nu(t)}}dt=0,$$

puisque $-\nu(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers α.

De plus en faisant t_1 une fonction de t_0 on peut écrire l'équation

$$-\nu(t_1)=-\nu(t_0)+K'\sqrt{-\nu(t_0)},$$

où K' est aussi un nombre positif quelconque mais fixe. On peut démontrer cette équation en choisissant le nombre K dans l'équation précédente respectivement supérieur ou inférieur à K' et montrer par là la condition est nécessaire et suffisante. La nouvelle expression des conditions ne contient plus l'abscisse x du point pour lequel nous

considérons la limite de $\varphi_i(x)$ avec $i \to +\infty$; la propriété ne dépend donc pas de x dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$, c'est-à-dire que si elle est vérifiée en un point x, elle le sera aussi pour chaque point x tel que $\alpha < x \leqq \beta$. En résumé, en écrivant x au lieu de t, et K au lieu de K', nous obtenons un lemme qui sera utile tout à l'heure.

Pour que toutes les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$..... *existent, et que l'on ait*

$$\lim_{i \to +\infty} \varphi_i(x) = 0$$

en un point x *tel que* $\alpha < x \leqq \beta$, *ou, ce qui revient au même, en tous les points de l'intervalle* $\alpha < x \leqq \beta$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{x_0 \to \alpha + 0} \int_{x_1}^{x_0} \varphi'(x) \frac{e^{-\nu(x)}}{\sqrt{-\nu(x)}} dx = 0,$$

x_0 *étant pris au voisinage de* α *et* x_1 *étant la plus petite valeur pour laquelle*

$$-\nu(x_1) = -\nu(x_0) + K\sqrt{-\nu(x_0)},$$

K *étant un nombre positif arbitraire.*

Cette condition est équivalente à

$$\lim_{x_0 \to \alpha + 0} \int_{x_1}^{x_0} \varphi(x)\nu'(x) \frac{e^{-\nu(x)}}{\sqrt{-\nu(x)}} dx = 0,$$

si l'on admet l'hypothèse de $\varphi'(x)$ sommable dans $\alpha < x \leqq \beta$. Pour le vérifier il suffit de supposer que nous sommes partis de la fonction $\varphi(x)\nu'(x)$ au lieu de $\varphi'(x)$ dans la formation de la suite par (6). Ceci étant établi, la condition peut encore être remplacée par

$$\lim_{x_0 \to \alpha + 0} \frac{1}{\sqrt{-\nu(x_0)}} \int_{x_1}^{x_0} \varphi(x)\nu'(x) e^{-\nu(x)} dx = 0,$$

en vertu de la condition relative à x_1. En appliquant le théorème de la moyenne de l'intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-\nu(x_0)}} \int_{x_1}^{x_0} \varphi(x)\nu'(x) e^{-\nu(x)} dx &= \frac{\varphi(\xi) e^{-\nu(\xi)}}{\sqrt{-\nu(x_0)}} \int_{x_0}^{x_1} \nu'(x) dx \quad (x_1 \leqq \xi \leqq x_0) \\ &= \varphi(\xi) e^{-\nu(\xi)} \cdot \frac{\nu(x_0) - \nu(x_1)}{\sqrt{-\nu(x_0)}} \\ &= \varphi(\xi) e^{-\nu(\xi)} \cdot K. \end{aligned}$$

Par conséquent, au lieu d'une condition nécessaire et suffisante, nous avons seulement, comme condition nécessaire,

$$\lim_{x\to\alpha+0}\varphi(x)e^{-\nu(x)}=0,$$

et, comme condition suffisante,

$$\lim_{x\to\alpha+0}\varphi(x)e^{-\nu(x)}=0.$$

Remarquons que l'on peut démontrer ces deux conditions par d'autres voies. La première se démontre immédiatment par l'absurde en supposant que $\varphi(x)e^{-\nu(x)}$ soit toujours supérieur à un nombre positif fixe et en concluant de là que $\varphi_i(x)$ ne tend pas vers zéro. La seconde condition, ainsi que la condition pour la convergence des approximations successives, peut être obtenue par une méthode féconde de M. Nagumo[1].

Tous ces préliminaires vont nous permettre maintenant de considérer l'équation différentielle ordinaire

$$y(x)=\int_0^x f[x, y(x)]dx,$$

où la fonction inconnue est $y(x)$. Nous faisons sur $f(x, y)$ les hypothèses suivantes. Soient $S(x)$ et $T(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle $0\leqq x\leqq a$ et telles que l'on ait $S(x)<T(x)$ pour x positif; et soit $f(x, y)$ une fonction finie dans le domaine $D[0\leqq x\leqq a, S(x)\leqq y\leqq T(x)]$, $f(x, y)$ est une fonction continue de y si l'on fixe x et une fonction mesurable de x si l'on fixe y. Supposons de plus que les bornes inférieure et supérieure de $f(x, y)$ quand on fait varier y entre $S(x)$ et $T(x)$, x étant fixe, soient sommables, comme fonctions de x, dans l'intervalle $0\leqq x\leqq a$; et en les écrivant respectivement $U'(x)$ et $V'(x)$ et en posant

$$U(x)=\int_0^x U'(x)dx, \qquad V(x)=\int_0^x V'(x)dx,$$

supposons que l'on ait dans l'intervalle $0\leqq x\leqq a$

$$S(x)\leqq U(x)\leqq V(x)\leqq T(x).$$

Posons enfin pour simplifier l'écriture

$$W'(x)=V'(x)-U'(x), \quad W(x)=\int_0^x W'(x)dx.$$

1. Japanese Jour. Math., **7**. p. 143 (1930).

Dans le cas ordinaire nous pouvons considérer que $f(x, y)$ satisfait à ces conditions en restreignant convenablement le domaine D ; tel est par exemple le cas où $f(x, y)$ est continue au voisinage de l'origine ; tandis que nous ne pouvons pas connaître pratiquement les valeurs exactes de $U'(x)$, $V'(x)$, $U(x)$ et $V(x)$; néanmoins cela ne saurait nous empêcher d'arriver à quelques résultats importants.

Faisons maintenant une hypothèse essentielle à notre théorie. Désignons par $N(x)$ la borne supérieure de la quantité

$$\left| \frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{y-\bar{y}} \right|,$$

quand on fait varier, en laissant x étant fixe, y et $\bar{y}$ de toutes les manières compatibles avec $S(x) \leqq \bar{y} < y \leqq T(x)$. $N(x)$ est alors une fonction mesurable comme on le démontrera aisément, ainsi que la fonction plus générale $X'(x)$ que nous introduirons tout à l'heure. Cela posé, nous faisons l'hypothèse que $N(x)$ *est sommable dans* $\varepsilon \leqq x \leqq a$ *pour tout nombre petit positif* ε. Le cas où $N(x)$ est sommable dans $0 < x \leqq a$ tout entier ne fait plus de difficulté, et nous laisserons ce cas de côté dans la suite. En désignant par $L(x)$ une fonction primitive quelconque de $N(x)$, nous avons donc toujours dès maintenant

$$\lim_{x \to +0} L(x) = -\infty.$$

Ces hypothèses posées, prenons une fonction arbitraire de x $y_0(x)$ mesurable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et telle que

$$S(x) \leqq y_0(x) \leqq T(x).$$

Déterminons ensuite la suite de fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$,..... par les formules

$$y_{i+1}(x) = \int_0^x f[x, y_i(x)]dx \qquad (i = 0, 1, 2.....).$$

Ces déterminations sont possibles en vertu des hypothèses que nous avons faites et ces fonctions sont toutes contenues dans D pour $0 \leqq x \leqq a$.

La suite des fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$,..... *converge alors vers une solution* $y(x)$ *de notre équation et* $y(x)$ *est la seule solution contenue dans* D, *si l'on a*

$$\lim_{x_0 \to +0} \int_{x_1}^{x_0} W'(x) \frac{e^{-L(x)}}{\sqrt{-L(x)}} dx = 0,$$

x_1 *étant le plus petit nombre tel que*

$$-L(x_1)=-L(x_0)+K\sqrt{-L(x_0)}\,,$$

K *étant un nombre positif arbitraire.*

Cette proposition découle immédiatement du lemme précédent. On a manifestement pour un entier positif quelconque p,

$$|y_0(x)-y_p(x)|\leqq\int_0^x W'(x)dx=W(x),$$

et par conséquent

$$|y_1(x)-y_{1+p}(x)|\leqq\int_0^x|y_0(x)-y_p(x)|\,N(x)dx=\int_0^x W(x)N(x)dx$$

et ainsi de suite successivement. Donc en posant $\alpha=0$, $\beta=a$, $\varphi'(x)=W'(x)$ et $\nu'(x)=N(x)$ dans le lemme, nous avons indépendemment de p

$$|y_i(x)-y_{i+p}(x)|\leqq\varphi_i(x)\qquad(i=0,\,1,\,2,\ldots),$$

et la condition énoncée ci-dessus entraîne

$$\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(x)=0$$

pour $0<x\leqq a$. Donc la suite $y_0(x)$, $y_1(x)$,..... converge et la limite $y(x)$ est une intégrale de notre équation. On démontre de même l'unicité de la solution en partant de l'inégalité

$$|y(x)-y_0(x)|\leqq\int_0^x W'(x)dx.$$

(C. q. f. d.)

Cette condition contient comme cas particulier la condition

$$\lim_{x\to+0}e^{-L(x)}.\,W(x)=0$$

comme nous l'avons remarqué après le lemme précédent. Par la même occasion nous avons montré aussi que notre condition entraîne nécessairement

$$\lim_{x\to+0}e^{-L(x)}.\,W(x)=0,\tag{8}$$

ce qui est, en réalité, une condition suffisante pour que la solution de notre équation soit unique dans le domaine D. Nous retrouverons cette condition dans la suite par raisonnement très simple dont la primeur revient à M. Tonelli et que nous précisons quelque peu. La

condition que nous obtenons par la méthode d'approximations successives n'est donc pas essentiellement une condition suffisante très nouvelle de l'unicité de la solution de l'équation différentielle,

Faisons sur $f(x, y)$ les mêmes hypothèses que précédemment sauf en ce qui concerne $N(x)$, que nous remplaçons comme nous allons voir. Introduisons une fonction continue et non décroissante $Y(z)$ définie pour $z \geqq 0$ et telle que l'on ait

$$Y(0)=0, \qquad Y(z)>0 \quad (z>0),$$

l'intégrale $\int_0^x \frac{dz}{Y(z)}$ n'étant pas finie. Si l'on désigne par $Z(z)$ une fonction primitive de $\frac{1}{Y(z)}$, on a alors

$$\lim_{z \to +0} Z(z) = -\infty.$$

Considérons alors la borne supérieure de

$$\frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{Y(y-\bar{y})},$$

quand, x étant fixe, on donne à y et $\bar{y}$ toutes les valeurs possibles, compatibles avec $S(x) \leqq \bar{y} < y \leqq T(x)$; et désignons cette borne par $X'(x)$. Cette fonction $X'(x)$ est mesurable comme $N(x)$ et l'on a

$$\frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{Y(y-\bar{y})} \leqq X'(x).$$

Nous adopterons ici l'hypothèse que $X'(x)$ *est sommable*[1] *dans l'intervalle* $\varepsilon \leqq x \leqq a$ *pour tout nombre petit positif* ε.

Supposons qu'il y ait dans D deux solutions distinctes $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ de notre équation et $y(x_1) > \bar{y}(x_1)$ en un certain point x_1 positif. Au voisinage de ce point on a l'inégalité

$$\frac{f[x, y(x)]-f[x, \bar{y}(x)]}{Y[y(x)-\bar{y}(x)]} - X'(x) \leqq 0,$$

qui est vérifiée jusqu'à ce que x arrive en un point x_2 où l'on a

1. On pourrait dire au lieu de "sommable" "totalisable". Mais il est inutile de faire ce changement parce que l'hypothèse que $X'(x)$ soit totalisable entraîne nécessairement sa sommabilité. Nous avons, en effet,

$$\frac{f[x, T(x)]-f[x, S(x)]}{Y[T(x)-S(x)]} - X'(x) \leqq 0,$$

où le premier terme du premier membre est sommable dans $\epsilon \leqq x \leqq a$. Ce premier membre, étant totalisable et toujours du même signe, doit donc être sommable et par conséquent $X'(x)$ l'est aussi.

$y(x_2)=\bar{y}(x_2)$. Mais le premier membre est la dérivée d'une fonction absolument continue

$$Z[y(x)-\bar{y}(x)]-X(x),$$

qui doit donc être de plus en plus grand à mesure que la variable x s'approche de l'origine. D'autre part cette fonction tend, par hypothèse, vers $-\infty$ quand x tend en décroissant vers le point x_2. Par conséquent entre o et x_1 il n'y a pas de point x_2 autre que l'origine et cette fonction doit y être bornée inférieurement, c'est-à-dire que l'on a

$$\varliminf_{x\to+0}\{Z[y(x)-\bar{y}(x)]-X(x)\}\neq-\infty.$$

Puisque $o<y(x)-\bar{y}(x)\leqq W(x)$, nous ne pouvons pas avoir, a fortiori,

$$\boxed{\varliminf_{x\to+0}\{Z[W(x)]-X(x)\}=-\infty.}$$

Nous concluons de là que si cette condition se réalise la solution doit être unique. Nous arrivons ainsi à une condition suffisante de l'unicité de la solution de notre équation.

Cette condition est satisfaite si $X'(x)$ est sommable dans $o<x\leqq a$. C'est la condition de M. Tonelli.

En outre, si nous posons en particulier

$$Y(z)=z, \qquad Z(z)=\log z,$$

nous avons la condition d'unicité

$$\varliminf_{x\to+0} e^{-X(x)}.\ W(x)=o,$$

qui contient la condition (8) énoncée plus haut car on a

$$|X'(x)|\leqq N(x).$$

Cette condition contient aussi toutes les conditions que nous avons énoncées dans notre mémoire précédent. Par exemple si $f(x,y)$ est continue à l'origine, on peut prendre $S(x)$ et $T(x)$ de manière qu'elles s'annulent pour $x=o$, et cependent que toutes les solutions possibles soient contenues dans D; on a alors

$$W(x)=o(x) \qquad (x\to+o),$$

grâce au théorème de la moyenne de l'intégrale. Donc il suffit pour l'unicité de la solution que la limite

$$\varliminf_{x\to+o} e^{-X(x)}.\ x$$

soit finie.

Nous tenons à la fin de ce mémoire à remercier M. le professeur T. Matsumoto, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous aider par de nombreuses suggestions dont nous avons tiré grand profit.

Über sternige und konvexe Abbildung

Von

Akira Kobori

(Eingegangen am 5. Juli, 1932)

In der vorliegenden Arbeit beschäftigte ich mich mit der Potenzreihe $f(z)$, die die Eigenschaft

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1$$

besitzt, d. h. die von der Form

$$(1) \qquad f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

ist.

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Kreise $|z|<r$. Wenn der Bildbereich vom Kreise $|z|<r$, der von der Potenzreihe (1) abgebildet wird, schlicht und von jeder Geraden durch der Nullpunkt in nur einer Strecke geschnitten wird, heisst diese Abbildung *sternige Abbildung* und die obere Grenze von r die *Sternschranke*. Ist die Höhlung der Randkurve des Bildbereiches von $|z|<r$, der von der im Kreise $|z|<r$ regulären und schlichten Potenzreihe von der Form (1) abgebildet wird, stets gegen den Nullpunkt kehrt, heisst die Abbildung *konxexe Abbildung* und die obere Grenze von r die *Rundungsschranke*.

Es ist schon bekannt, dass die schlichte Potenzreihe (1) den Kreis $|z|<r$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen, bezw. konvexen Bereich abbildet, wenn

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0^1 \qquad \text{für} \qquad |z|<r$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \qquad \text{für} \qquad |z|<r.$$

Im folgenden aber möchte ich mit Hilfe dieser Ausdrücke einige Bedingungen für Sternigkeit und Konvexität unter Benutzung der

1. Unter $\Re\zeta$ versteht man den Realteil von ζ.

Koeffizienten der Potenzreihe (1) ausdrücken und als Anwendung die Sternschranken und die Rundungsschranken der Potenzreihen und ihre Abschnitte finden, die mit der Eigenschaft

(2) $\quad |f(z)|<M \quad (M>1) \quad$ für $\quad |z|<1$

oder

(3) $\quad |f'(z)|<N \quad (N>1) \quad$ für $\quad |z|<1$

charakterisiert sind.

I. Konvexe Abbildung

1. Zuerst beschäftige ich mich mit der konvexen Abbildung. Es sei ρ die grösste positive Zahl, die der Beziehung

$$2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt, so ist

$$\begin{aligned}&2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\&\quad<2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\ldots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1\end{aligned}$$

Damit bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den schlichten Bereich ab; denn für $|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$ ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|>1-\{2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\}$$

und

$$\left|\frac{S_n(z_1)-S_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|>1-\{2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}\}.$$

Folglich ist

$$f'(z)\neq 0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho;$$

daher ist

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

regulär im Kreise $|z|<\rho$. Ferner ist für $|z|<\rho$

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|<\frac{2|a_2|\rho+3.2|a_3|\rho^2+\ldots+n(n-1)|a_n|\rho^{n-1}+\ldots}{1-\{2|a_2|\rho+\ldots+n|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\}}$$

$$=\frac{\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^2|a_\nu|\rho^{\nu-1}-\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a_\nu|\rho^{\nu-1}}{1-\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu|a|\rho^{\nu-1}}\leqq 1$$

Dann ist

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho.$$

Damit erhält man den Satz:

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Einheitskreise $|z|<1$ und ρ die grösste positive Zahl, die die Eigenschaft

$$2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1$$

besitzt, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab.

Als Beispiel dieses Satzes betrachte ich die Potenzreihe

$$f(z)=\frac{2}{3}\left\{1-(1-z)\sqrt{1-z}\right\}$$

$$=z-\frac{1}{2^2}z^2-\frac{1}{2^2\cdot 3!}z^3-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 4!}z^4-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^{n-1}\cdot n!}z^n-\cdots\cdots$$

Hier ist

$$2^2|a_2|\cdot\frac{2}{3}+3^2|a_3|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{1-(1-\rho)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}}\right\}_{\rho=\frac{2}{3}}$$

$$=1,$$

daher bildet nach dem obigen Satze $f(z)$ den Kreis $|z|<\frac{2}{3}$ auf den konvexen Bereich ab. Hinsichtlich dieser Rundungsschranke aber zeigt E. Study[1] auf anderem Wege, dass sie gleich $\frac{2}{3}$ ist.

2. Hier möchte ich zur Anwendung dieses Satzes übergehen. Erstens leite ich einen dem Takahashi[2]-Kakeyaschen[3] analongen Satz ab, welcher lautet:

Es sei $f(z)$ regulär im Kreise $|z|<1+N+\sqrt{N(1+N)}$, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<1$ auf den konvexen Bereich ab, wenn

$$|f'(z)|\leqq N \quad \textit{für} \quad |z|<1+N+\sqrt{N(1+N)} \quad (N\geqq 1).$$

1. E. Study: Vorlesung über ausgewählte Gegenstände der Geometrie II, S. 135.
2. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ, 33 (1930).
3. S. Kakeya: Science Reports, Tokyo Univ. Sci. & Lit., A (1932).

Um diesen Satz zu beweisen, benutze ich den Koeffizientensatz. Nach diesem Satze ist

$$n|a_n| \leqq \frac{N}{r^{n-1}}, \quad \text{wo} \quad r=1+N+1\sqrt{N(1+N)} \quad \text{bedeutet.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &2^2|a_2|+3^2|a_3|+\cdots\cdots+n^2|a_n|+\cdots\cdots \\ &\leqq N\left(\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{r^{n-1}}+\cdots\cdots\right) \\ &=\frac{N(2r-1)}{(r-1)^2} \\ &=1, \end{aligned}$$

weil $r=1+N+1\sqrt{N(1+N)}$ ist, w. z. b. w.

Zweitens untersuche ich die Rundungsschranke der Potenzreihe, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und die Eigenschaft (2) besitzt.

Es ist

$$\begin{aligned} &2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots \\ &\leqq 1\sqrt{|a_2|^2+|a_3|^2+\cdots\cdots+|a_n|^2+\cdots\cdots} \\ &\qquad \times 1\sqrt{2^4\rho^2+3^4\rho^4+\cdots\cdots+n^4\rho^{2(n-1)}+\cdots\cdots} \\ &\leqq 1\sqrt{M^2-1}\sqrt{\frac{1+11\rho^2+11\rho^4+\rho^6}{(1-\rho^2)^5}-1} \\ &\leqq 1, \end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^5+r^6+11r^4+11r^2+1=0$$

bedeutet, die, wie man leicht nachprüft, kleiner als Eins ist. Damit erhält man den Satz:

Die im Einheitskreise $|z|<1$ reguläre Potenzreihe und ihre sämtlichen Abschnitte bilden den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn die Potenzreihe der Bedingung (2) genügt, wo ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^5+r^6+11r^4+11r^2+1=0$$

bedeutet.

Schliesslich betrachte ich die Potenzreihe, die der Bedingung (3) genügt. In diesem Falle ist nach dem bekannten Satz und mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2^2|a_2|\rho+3^2|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots \\
&\leqq 1\sqrt{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|^2+\cdots\cdots} \\
&\qquad\qquad \times 1\sqrt{2^2\rho^2+3^2\rho^4+\cdots\cdots+n^2\rho^{2(n-1)}+\cdots\cdots} \\
&\leqq 1\cdot N^2-1\sqrt{\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^3}-1} \\
&=1,
\end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{N^2}{N^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

bedeutet, die natürlich kleiner als Eins ist.

Hiermit ist bewiesen:

Die Potenzreihe, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und der Bedingung (3) *genügt, sowie ihre sämtlichen Abschnitte bilden den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn die Potenzreihe die Eigenschaft* (3) *besitzt, wobei ρ die kleinste positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{N^2}{N^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

bedeutet.

II. Sternige Abbildung

3. Nun gehe ich zur sternigen Abbildung über und betrachte am Anfang die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$, d. h. Potenzreihen, die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär und schlicht sind.

A. Mark[1] hat in seiner interessanten Arbeit bewiesen, dass an der Stelle z, wo

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

gültig ist, auch die Beziehung

1. A. Marx: Sitzungsberichte preussischer Akademie, Berlin (1929).

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

gilt. Da aber

$$\frac{f(z)}{z}=1+a_2z+\cdots\cdots+a_nz^{n-1}+\cdots\cdots$$

ist, so ist *a fortiori* für die grösste positive Zahl ρ, die der Beziehung

$$|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1$$

genügt,

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0.$$

Daher ist nach dem Marxschen Satz

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho.$$

Hiermit ist bewiesen:

Wenn die Potenzreihe (1) zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört, so bildet sie den Kreis $|z|<\rho$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls ρ die grösste positive Zahl derart ist, dass

$$|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1 \tag{4}$$

ist.

Als Beispiel betrachte ich wieder die Potenzreihe

$$f(z)=\frac{2}{3}\{1-(1-z)\sqrt{1-z}\}$$

$$=z-\frac{1}{2^2}z^2-\frac{1}{2^2\cdot 3!}z^3-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 4!}z^4-\cdots\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^{n-1}n!}z^n\cdots\cdots,$$

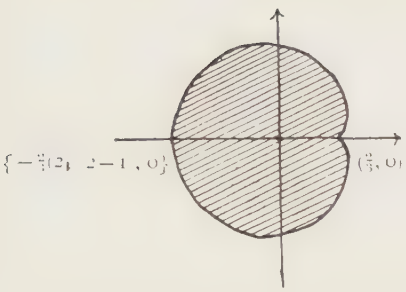
die, wie man leicht nachprüft, zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört. Ferner ist

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 4!}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-5)}{2^{n-1}n!}+\cdots\cdots$$

$$<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Daher muss nach dem obigen Satze $f(z)$ den Kreis $|z|<1$ auf den



Bereich abbilden, der in Bezug auf den Nullpunkt sternig ist, und in der Tat ist der Bildbereich vom Kreise $|z|<1$ sternig in Bezug auf den Nullpunkt, wie die Illustration deutlich zeigt.

4. Nun gehe ich zur Anwendung dieses Satzes über. Erstens erhält man den verschärften Takahashischen[1] Satz, welcher lautet:

Der Kreis $|z|<1$ wird durch die Potenzreihe von der Klasse $\mathfrak{S}$ sternig in Bezug auf den Nullpunkt abgebildet, wenn

$$f'(z)|\leqq N \quad \text{für} \quad |z|<\tau \quad (N\geqq 1),$$

wo τ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$r\log\frac{r}{r-1}=\frac{1+N}{N}$$

bedeutet.

Um diesen Satz zu beweisen, benutze ich den Koeffizientensatz. Es gilt

$$|a_n|\leqq \frac{N}{n\tau^{n-1}} \qquad n=2,3,\ldots\ldots .$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
&|a_2|+|a_3|+\ldots\ldots+|a_n|+\ldots\ldots \\
&\leqq N\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{1}{3\tau^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\tau^{n-1}}+\ldots\ldots\right) \\
&< N\tau\left(\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{3\tau^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\tau^n}+\ldots\ldots\right) \\
&= N\tau\left\{\log\frac{\tau}{\tau-1}-\frac{1}{\tau}\right\} \qquad (\tau>1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

weil τ die kleinste positive Wurzel der transzendenten Gleichung

1. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ., 33 (1930). Der originale Satz sagt: Der Bereich $|z|<1$ wird durch die im Einheitskreise reguläre und schlichte Funktion mit beliebigen reellen Koeffizienten $f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ sternig in bezug auf den Nullpunkt abgebildet, wenn $|f'(z)|\leqq M$ für $|z|<2M$ $(M\geqq 1)$.

$$r\log\frac{r}{r-1}=\frac{1+N}{N}$$

bedeutet, w. z. b. w.

Wie man leicht nachrechnet, ist $r<1+N$.

Wenn die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ der Bedingung (2) genügt, so ist der Flächeninhalt ihres Bildbereiches nicht grösser als $M^2\pi$. Daher erhält man die Beziehung

$$\pi(1^2+2|a_2|^2+\cdots\cdots+n|a_n^2|+\cdots\cdots)\leqq M^2\pi$$

d. h.

$$2|a_2|^2+3|a_3|^2+\cdots\cdots+n|a_n|^2+\cdots\cdots\leqq M^2-1.$$

Dann hat man mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\\
&=\sqrt{2}\,|a_2|\cdot\frac{\rho}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\,|a_3|\cdot\frac{\rho^2}{\sqrt{3}}+\cdots+\sqrt{n}\,|a_n|\,\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots\\
&\leqq\sqrt{2}\,\sqrt{2|a_2|^2+3|a_3|^2+\cdots\cdots+n|a_n|^2+\cdots\cdots}\\
&\qquad\times\sqrt{\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{3}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{2(n-1)}}{n}+\cdots\cdots}\\
&\leqq\frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho}\sqrt{\log\frac{1}{1-\rho^2}-\rho^2}\\
&=1,
\end{aligned}$$

wenn ρ die kleinste positive Wurzel—man sieht sehr leicht, dass diese Wurzel kleiner als Eins ist—der transzendenten Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\log\frac{1}{1-r^2}=\frac{M^2}{M^2-1}$$

bedeutet.

Folglich kann man behaupten:

Genügt die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ der Bedingung (2), so ist ihre Sternschranke bei der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\log\frac{1}{1-r^2}=\frac{M^2}{M^2-1}$$

gegeben.

Ferner betrachte ich die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$, die der Bedingung (3) genügt. Nach dem bekannten Satz ist

$$1^2+2^2|a_2|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots\leqq N^2.$$

Daher ist mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad=2|a_2|\cdot\frac{\rho}{2}+3|a_3|\cdot\frac{\rho^2}{3}+\ldots\ldots+n|a_n|\cdot\frac{\rho^{n-1}}{n}+\ldots\ldots\\
&\quad\leqq\sqrt{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\ldots\ldots+n^2|a_n|^2+\ldots\ldots}\\
&\qquad\times\sqrt{\frac{\rho^2}{2^2}+\frac{\rho^4}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{\rho^{2(n-1)}}{n^2}+\ldots\ldots}\\
&\quad\leqq\rho\sqrt{N^2-1}\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots}\\
&\quad\leqq\rho\sqrt{N^2-1}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}-1}\\
&\quad=1,\quad\text{für}\quad\rho=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(\pi^2-6)\,(N^2-1)}},
\end{aligned}$$

man hat also den Satz bewiesen:

Genügt die Potenzreihe der Klasse $\mathfrak{S}$ *der Bedingung* (3), *so ist ihre Sternschranke nicht kleiner als* $\sqrt{6}/\sqrt{(\pi^2-6)(N^2-1)}$.

5. Nun ziehe ich die Potenzreihe

$$z+2z^2+\ldots\ldots+nz^n+\ldots\ldots=\frac{z}{(1-z)^2}$$

in Betracht, die zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört und wo

$$\begin{aligned}
&|a_2|\rho+|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad\leqq 2\rho+3\rho^2+\ldots\ldots+n\rho^{n-1}+\ldots\ldots\\
&\quad=\frac{1}{(1-\rho)^2}-1
\end{aligned}$$

ist. Daher ist

$$=1\quad\text{für}\quad\rho=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.29\ldots\ldots$$

Aber ihr zweiter Abschnitt

$$z+2z^2$$

ist schlicht nicht im Kreise $|z|<1-\frac{1}{\sqrt{2}}=$, sondern im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$.

Daraus kann man schliessen, dass die Bedingung (4) für die Schlichtheit der Abschnitte nicht hinreichend ist.

Wenn man aber für die Potenzreihe, die regulär im Einheitskreise $|z|<1$ ist, die grösste positive Zahl ρ finden kann, die der Bedingung

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+n|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1$$

genügt, so sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte

$$S_n(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n \qquad n=2,3,\cdots\cdots$$

schlicht im Kreise $|z|<\rho$.

Es sei dieses ρ bestimmt. Hier benutze ich den Satz[1], welcher lautet:

Der Kreis $|z|<\rho$ wird durch $f(z)$ dann und nur dann auf einen Stern abgebildet, wenn das durch

$$f(z)=zF'(z)$$

erklärte $F(z)$ den $|z|<\rho$ konvex abbildet.

Nun ist aber

$$f(z)=z(1+a_2z+\cdots\cdots+a_nz^{n-1}+\cdots\cdots).$$

Man nimmt als $F(z)$ die Potenzreihe

$$F(z)=z+\frac{a_2}{2}z^2+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n}z^n+\cdots\cdots$$

Nun bildet aber nach dem Satze, den ich im ersten Teil gezeigt habe, $F(z)$ den Kreis $|z|<\rho$ auf den konvexen Bereich ab, wenn ρ die grösste Zahl ist, die der Beziehung

$$2^2\left|\frac{a_2}{2}\right|\rho+3^2\left|\frac{a_3}{3}\right|\rho^2+\cdots\cdots+n^2\left|\frac{a_n}{n}\right|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1$$

d. h.

$$2|a_2|\rho+3|a_3|\rho+\cdots\cdots+n|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\leqq 1$$

genügt. Ferner ist dies auch richtig für die Abschnitte der Potenzreihe, so hat man den Satz:

Es sei die Potenzreihe (1) regulär im Einheitskreise $|z|<1$, so bilden $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis $|z|<\rho$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, wenn ρ die grösste positive Zahl ist, die der Beziehung

---

1. Vgl. L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, II 2. Aufl. S. 82.

$$2\,|a_2|\rho+3\,|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n\,|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots\leqq 1$$

genügt.

6. Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht den Takahashi[1]-Kakeyaschen[2] Satz ableiten:

Es sei die Potenzreihe (1) *regulär im Kreise* $|z|<2N$ $(N\geqq 1)$, *so bilden* $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Einheitskreis* $|z|<1$ *auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls*

$$|f'(z)\leqq N \quad \text{für} \quad |z|<2N.$$

Nach dem bekannten Koeffizientensatz ist

$$n\,|a_n|\leqq\frac{N}{2^{n-1}N^{n-1}}$$

$$\leqq\frac{1}{2^{n-1}},\quad \text{da}\quad N\geqq 1.$$

Daher ist

$$2\,|a_2|+3\,|a_3|+\ldots\ldots+n\,|a_n|+\ldots\ldots$$

$$\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\ldots$$

$$=1,$$

was zu beweisen war.

Im Falle die im Einheitskreise reguläre Potenzreihe die Eigenschaft (2) besitzt, so ist

$$|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots\ldots+|a_n|^2+\ldots\ldots\leqq M^2-1.$$

Daher ist

$$2\,|a_2|\rho+3\,|a_3|\rho^2+\ldots\ldots+n\,|a_n|\rho^{n-1}+\ldots\ldots$$

$$\leqq 1\sqrt{|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots\ldots+|a_n|^2+\ldots\ldots}$$

$$\times 1\sqrt{2^2\rho^2+3^2\rho^4+\ldots\ldots+n^2\rho^{2(n-1)}+\ldots\ldots}$$

$$\leqq 1\sqrt{M^2-1}\sqrt{\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^3}-1}=1,$$

wenn ρ die kleinste positive Wurel, $(\rho<1)$, der Gleichung

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

1. S. Takahashi loc. cit.
2. S. Kakeya loc. cit.

ist. Hiermit ist bewiesen :

Wenn die Potenzreihe, die im Einheitskreise regulär ist, der Bedingung (2) *genügt, so ist die Sternschranke von* $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte durch die kleinste positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{M^2}{M^2-1}(r^2-1)^3+r^2+1=0$$

gegeben.

Ist die Potenzreihe durch die Bedingung (3) charakterisiert, so erhält man nach der bekannten Ungleichung die Beziehung

$$2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|^2+\cdots\cdots\leqq N^2-1,$$

daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&2|a_2|\rho+3|a_3|\rho^2+\cdots\cdots+n|a_n|\rho^{n-1}+\cdots\cdots\\
&\leqq 1\Big/\overline{2^2|a_2|^2+3^2|a_3|^2+\cdots\cdots+n^2|a_n|^2+\cdots\cdots}\\
&\qquad\times 1\Big/\overline{\rho^2+\rho^4+\cdots\cdots+\rho^{2(n-1)}+\cdots\cdots}\\
&\leqq 1\Big/\sqrt{N^2-1}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\\
&=1,\quad \text{für}\quad \rho=\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

ist. Damit ist bewiesen :

Ist die Potenzreihe (1) *regulär im Einheitskreise* $|z|<1$, *so bilden* $f(z)$ *und ihre sämtlichen Abschnitte den Kreis* $|z|<1/N$ *auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen Bereich ab, falls* $f(z)$ *die Eigenschaft* (3) *besitzt.*

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seine wertvollen Bemerkungen zu meiner Arbeit meinen herzlichen Dank ausdrücken.

Bemerkung bei der Korrektur: In der Arbeit vom Herrn K. Noshiro (Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I, 1932), die er mir freundlich gegeben hat, fand ich, dass er und Herr J. Dieudonné das verwandte Problem für die Potenzreihen (2) und (3) betrachtet haben.

Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet

von

Akira Kobori

(Eingegangen am 8. Juli, 1932)

Es ist schon bekannt, dass eine im Kreise $|z|<R$ reguläre und *schlichte* Potenzreihe der Form

$$(1) \qquad f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

den Kreis $|z|<R$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen bezw. konvexen Bereich dann und nur dann abbildet, wenn sie der Bedingung

$$(2) \qquad \Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

bezw. der Bedingung

$$(3) \qquad 1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

genügt.

Bezüglich dieser Tatsache also entsteht es die Frage:

Ist der Bildbereich vom Kreisbereiche $|z|<R$ schlicht, *wenn die in diesem Kreisbereiche reguläre Potenzreihe der Form* (1) *der Bedingung* (2) *oder* (3) *genügt?*

Die vorliegende Arbeit hat zum Hauptziele dieses Problem zu lösen.

I. Der Hilfssatz

Erstens möchte ich einen Hilfssatz aufstellen und beweisen, der im folgenden Zeilen eine wichtige Rolle spielt. Der Satz lautet:

Genügt die Potenzreihe

$$F(z)=A_0+A_1z+\cdots\cdots+A_nz^n+\cdots\cdots,$$

die im Kreise $|z|<R$ *regulär ist, der Bedingung*

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}>-K,$$

wo K *eine positive und endliche Zahl bedeutet, so ist*

$$F(z)\neq 0$$

in $0\leqq|z|<R$ *bezw.* $0<|z|<R$, *wenn* $A_0\neq 0$ *bezw.* $A_0=0$ *ist.*

Beweis. (i) Der Fall, wo $A_0\neq 0$ ist.

Wäre a eine Nullstelle von $F(z)$ im Kreise $|z|<R$, so wird der Punkt $z=a$ ein einfacher Pol von $\frac{F'(z)}{F(z)}$. Daher wäre $z=a$ eine Nullstelle von der Ordnung m, so kann man schreiben:

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{m}{z-a}+G(z)$$

wo $m\geqq 1$ und $G(z)$ regulär in der Umgebung von $z=a$ ist.

So folgte, dass

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{mz}{z-a}+zG(z)$$

ist. Daher könnte man schreiben:

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=m\Re\frac{z}{z-a}+\Re zG(z).$$

Erstens sei a ein Punkt, der nicht auf der imaginären Achse ist. In diesem Falle nimmt man als z den Punkt auf der Gerade l, die von dem Punkte $z=a$ parallel zur reellen Achse gezogen ist.

Es sei

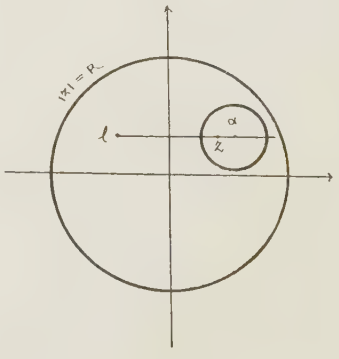
$$a=a+ib \qquad a\neq 0.$$

Da jeder Punkt auf der Gerade l von der Form

$$z=x+ib$$

ist, so hat man die Beziehung

Fig. 1



$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{m}{x-a}+\Re zG(z).$$

Es sei z an der linken Seite von a und ausserdem im Kreise liegt, dessen Radius $\frac{|a|}{1+H}$ und Mittelpunkt der Punkt a ist, wo H eine positive Zahl, die wie gross sein mag. Dann ist

$$\frac{mx}{x-a}<-mH.$$

Daraus folgt, dass, wenn z in dieser Weise nach a konvergiert,

$$\lim_{z\to a}\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=-\infty$$

ist, was mit der Voraussetzung, dass

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}>-K \quad (K\text{: positiv und endlich})$$

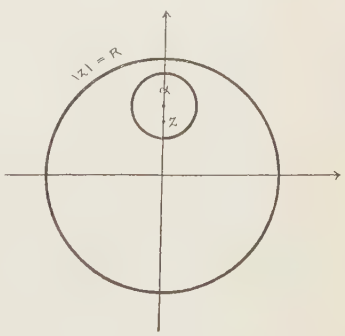
ist, im Widerspruch steht.

Zweitens sei a ein Punkt auf der imaginären Achse. In diesem Falle nimmt man als z die Punkten, die auf der imaginären Achse und unterhalb von a liegen.

Es sei

$$a=ib \quad b\neq 0.$$

Fig. 2



Da jeder Punkt auf der imaginären Achse von der Form

$$z=iy$$

ist, hat man die Beziehung

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{my}{y-b}+\Re zG(z).$$

Daher kann man schliessen, wie oben gesagt ist, dass, wenn man z auf der imaginären Achse von Unten nach a konvergieren lässt,

$$\lim_{z\to a}\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=-\infty$$

ist, was auch der Voraussetzung widerspricht.

So ist es bewiesen, dass

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0\leqq z<R$$

ist.

(ii) Der Fall, wo $A_0=0$ ist.

In diesem Falle ist die obigen Beweismethode auch gültig, so kann man schliessen ohne weiteres, dass

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R$$

ist.

Der fragliche Punkt aber ist der Koordinatenanfangspunkt. Es ist augenscheinlich, dass dieser Punkt der Nullstelle von $F(z)$ ist, weil $A_n=0$ ist.

In diesem Falle ist also

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R.$$

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

II. Der Hauptsatz

Zuerst beweise ich den Satz, der ein Teil von dem Hauptsatze ist. Der Satz lautet:

Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

die Potenzreihe, die die Eigenschaft

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

besitzt, so bildet $f(z)$ den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab.

Beweis. Nach dem Hilfssatze ist

$$f(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R.$$

Und an dem Koordinatenanfangspunkte ist

$$\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=0}=f'(0)=1,$$

folglich ist

$$\frac{f(z)}{z}\neq 0 \quad \text{in} \quad |z|<R.$$

Es sei $z=R'e^{i\vartheta}(R'<R)$, so ist der Voraussetzung nach

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\arg f(R'e^{i\vartheta})=\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0.$$

Damit läuft $f(z)$ auf der Bildkurve von der Kreisperipherie $|z|=R'$ im

positiven Sinne[1], wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft. Da ferner

$$\arg f(z)=\arg z+\arg\frac{f(z)}{z}$$

ist, so ist die Variation von $\arg f(z)$ gleich 2π, wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft, weil die Variation von $\arg\frac{f(z)}{z}$ Null ist.

Daher läuft $f(z)$ auf der Bildkurve im positiven Sinne einmal um, wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne einmal umläuft. Mit anderen Wort ist die Kreisperipherie $|z|=R'$ durch $f(z)$ ein-eindeutig auf eine geschlossene Kurve abgebildet. Daher nach dem von Darboux[2] herrührenden Satze besteht die Ein-eindeutigkeit auch im Innern.

Da R' beliebige positive Zahl ist, die kleiner als R ist, so kann man R' so gross wie möglich dem R näher kommen lassen. Damit bildet $f(z)$ den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab, was zu beweisen war.

Zweitens beschäftige ich mich mit dem Satze, der auch den Hauptsatz zusammemsetzt. Der Satz lautet:

Wenn die im Kreise $|z|<R$ *reguläre Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

die Eigenschaft

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

besitzt, so bildet $f(z)$ *den Kreisbereich* $|z|<R$ *auf den schlichten Bereich ab.*

Beweis. Da

$$f'(0)=1$$

ist, so ist nach dem Hilfssatze

$$f(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad |z|<R.$$

Hier betrachte ich die Potenzreihe

---

1. Unter „positiver Sinn" versteht man die Fortschreitungsrichtung vom Punkte, der auf der Randkurve des Bereiches so läuft, dass er den Bereich stets zu rechts sieht.

2. Vgl. W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie, I 5. Aufl. S. 397.

$$G(z)=zf'(z),$$

die regulär im Kreisbereiche $|z|<R$ und nicht Null für $0<|z|<R$ ist. Ferner ist

$$\Re\frac{zG'(z)}{G(z)}=1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R,$$

so bildet $G(z)$ nach dem ersten Satze den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab.

Andererseits im Bildpunkte $f(R'e^{i\vartheta})$ vom Punkte $z=R'e^{i\vartheta}$ der Kreisperipherie $|z|=R'$ (wo $R'<R$ ist) macht die Tangente der Bildkurve mit der reellen Achse den Winkel

$$\psi=\frac{\pi}{2}+\vartheta+\arg f'(R'e^{i\vartheta});$$

denn, wenn man setzt

$$z=x+iy$$

so wird

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

daher ist nach dem bekannten Formel

$$\tan\psi=\frac{dQ}{dP}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

$$=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}{\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)},$$

da

$$\frac{dy}{dx}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)$$

ist und $P(x,y)$, $Q(x,y)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. So ist

$$\tan\psi=\frac{\tan\arg f'(z)+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}{1-\tan\arg f'(z)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}$$

$$=\tan\left\{\frac{\pi}{2}+\vartheta+\arg f'(R'e^{i\vartheta})\right\}.$$

Da nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 1 + \Re \frac{zf''(z)}{f'(z)} > 0 \quad \text{für} \quad |z| < R$$

ist, so bewegt der Bildpunkt $f(R'e^{i\vartheta})$ im Sinne, wo der Winkel ψ anwachsen,——diesen Sinn heisse ich fortan der positive Sinn der f-Bildkurve,——wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft.

Der Winkel ψ ändert stetig mit dem Bildpunkte; denn, wenn man z so darstellt, wie

$$z = x(\vartheta) + iy(\vartheta) \qquad 0 \leqq \vartheta < 2\pi,$$

so wird $f(z)$ die Form

$$f(z) = P(\vartheta) + iQ(\vartheta)$$

nehmen.

Nun ist

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| < R,$$

so verschwinden $\frac{dP}{d\vartheta}$ und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ keinesweges gleichzeitig. Es ist $\frac{dx}{d\vartheta}$ und $\frac{dy}{d\vartheta}$ regulär im Intervall $0 \leqq \vartheta < 2\pi$, so sind $\frac{dP}{d\vartheta}$ und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ auch regulär in demselben Intervalle. Daher besteht die Bildkurve nur aus regulären Bogen. Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn ϑ von Null bis 2π anwachst, so $f(z)$ ein geschlossene Kurve darstellt und der Winkel ψ mit dem Bildpunkt $f(z)$ stetig ändert.

Diese Beweisführung aber ist nicht genug zu erkennen, ob die Kurve einfach ist. Daher beweise ich im folgenden Zeilen, dass die Bildkurve eine geschlossene einfache Kurve ist.

Bevor ich zum Beweise übergehe mache ich eine Vorbereitung dazu.

Wie obig bewiesen ist, ist die Potenzreihe $G(z) = zf'(z)$ schlicht im Kreise $|z| < R$, daher ist

$$F(z) = iG(z) = izf'(z)$$

auch schlicht in demselben Kreisbereiche, und ausserdem ist am Bildpunkte vom Punkte $z = R'e^{i\vartheta}$

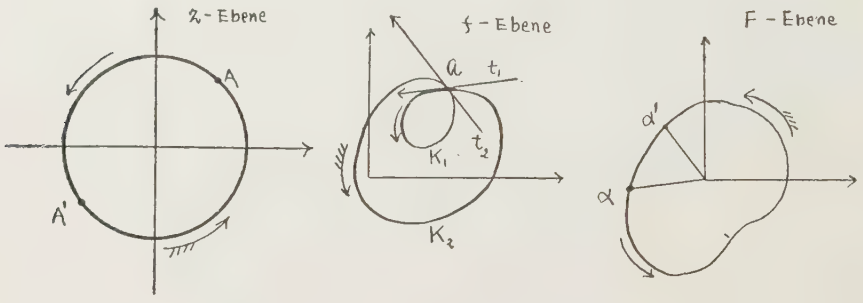
$$\arg F(R'e^{i\vartheta}) = \frac{\pi}{2} + \vartheta + \arg f'(R'e^{i\vartheta}).$$

Folglich ist jeder Radiusvektor der F-Ebene parallel zur Tangente am entsprechenden Bildpunkte der f-Ebene.

Nun gehe ich zum Beweise über.

Wäre erstens das f-Bild von der Kreisperipherie $|z|=R'$ einen Doppelpunkt a besitzen, dessen Urbildpunkten A und A' seien. Dann

Fig.3



im F-Bilde entspricht dem Punkte A der Punkt α, dessen Radiusvektor zur Tangente t_1 parallel ist.

Wenn der Punkt z auf dem Kreisperipherie $|z|=R'$ im positiven Sinne von A bis A' durchläuft, so umläuft $f(z)$ auf K_1 im positiven Sinne einmal und nimmt die Tangente die Lage t_2. Daher im F-Bilde bewegt der Bildpunkt von α nach α' im positiven Sinne, wo der Radiusvektor zur Tangente t_2 parallel ist.

Wenn z ferner von A' bis A im positiven Sinne durchläuft, so umläuft $f(z)$ einmal auf K_2 von a und wenn der Bildpunkt zu a zurückkehrt, nimmt die Tangente die Lage t_1. Daher im F-Bilde muss der Bildpunkt von α' bis α nach einmaligen Umlaufe auf der Bildkurve bewegen.

Daher besteht keine Ein-eindeutigkeit zwischen der Kreisperipherie $|z|=R'$ und ihre Bildkurve durch $F(z)$, was widerspricht die Tatsache, dass $F(z)$ schlicht im Kreise $|z|<R$ ist.

Wäre nun das f-Bild von der Kreisperipherie $|z|=R'$ solchen Doppelpunkt b besitzen, als an dem die zwei Tangenten zusammenfallen.

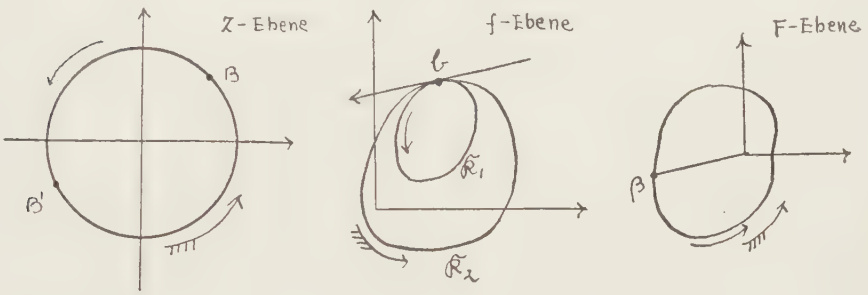
Es sei B und B' Urbildpunkten von b.

Wenn z vom Punkte B im positiven Sinne bis B' durchläuft, so läuft $f(z)$ von b z. B. auf $\mathfrak{K}_1$ einmal im positiven Sinne. Daher im F-Bilde läuft $F(z)$ einmal von β aus auf der Bildkurve im positiven Sinne um, wo der Radiusvektor zur Tangente am Punkte b parallel ist.

Wenn z ferner von B' aus bis B auf der Kreisperipherie $|z|=R'$ im positiven Sinne bewegt, so läuft $f(z)$ auf $\mathfrak{K}_2$ im positiven Sinne einmal um, damit im F-Bilde läuft $F(z)$ in demselben Sinne noch

einmal. Daher existiert zwischen der Kreisperipherie $|z|=R'$ und dessen F-Bilde keine Ein-eindeutigkeit, was mit der Eigenschaft von $F(z)$ im Widerspruch steht.

Fig. 4



Hiermit kann man schliessen, dass das f-Bild von der Kreisperipherie eine einfach geschlossene Kurve ist. Ferner ist die Abbildung ein-eindeutig ; denn, wäre die Abbilbung nicht ein-eindeutig, so müsste $f(z)$ auf der Bildkurve mehr als einmal im positiven Sinne umlaufen, daher läuft $F(z)$ auf der Bildkurve mehr als einmal um, was widerspricht der Schlichtheit von $F(z)$.

Man kann in ähnlicher Weise die Einfachheit beweisen, wenn man annahme, dass die Bildkurve mehr als einen Doppelpunkt besitze.

Daher bildet $f(z)$ den Kreisperipherie $|z|=R'$ ein-eindeutig auf die einfach geschlossene Kurve ab. Da ferner R' eine positive Zahl ist, die kleiner als R ist, so kann man R' so gross wie möglich dem R näher kommen lassen. Damit bildet $f(z)$ den Kreis $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab, was zu beweisen war.

Wenn man die obigen Sätze zusammenfasst und wenn man die geometrische Bedeutung der Ausdrücke (2) und (3), die ich im obigen Zeilen gezeigt habe, im Betracht zieht, so kann man folgendermass behaupten :

Die im Kreise $|z|<R$ *reguläre Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

bildet den Kreisbereich $|z|<R$ *auf den schlichten Bereich ab und weiter ist der Bildbereich sternig bezw. konvex, wenn die Potenzreihe die Eigenschaft*

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

besitzt.

Damit ist DER HAUPTSATZ bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine in einem Kreisbereiche $|z|<R$ *reguläre Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

denselben Kreisbereiche auf den sternigen (schlichten) bezw. konvexen (schlichten) Bereich abbildet, ist, dass $f(z)$ *die Eigenschaft*

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

besitzt.

III. Ein Zusatz

Drittens beweise ich einen Satz, der nicht den Hauptsatz zusammensetzt, sondern unmittelbar aus dem ersten Satze des zweiten Teils folgt und der eine neue Beziehung zwischen der Schlichtheitsschranke und der Nullstelle der Ableitung $f'(z)$ gibt.

Bevor ich zum Zusatze übergehe, gebe ich hier zwei Bemerkungen:

(i) Man kann nicht schliessen aus der Bedingung

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R,$$

dass

$$f'(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad |z|<R$$

ist. Denn, wenn man die Funktion

$$f(z)=z+z^2$$

im Betracht zieht, so ist

$$\Re\frac{f(z)}{z}=1+x>0 \quad \text{für} \quad |z|<1, \quad \text{wo} \quad z=x+iy \text{ ist,}$$

dagegen ist aber

$$f'(z)=1+2z=0 \quad \text{für} \quad z=-\frac{1}{2}.$$

(ii) Selbst wenn ρ der kleinste absolute Betrag der Nullstellen von der Funktion $f(z)$, braucht die Funktion noch kein schlichtes Bild vom Kreisbereiche $|z|<\rho$ zu entwerfen. Denn z. B. die Funktion

$$f(z)=\frac{1}{3}\{(1+z)^3-1\}$$

ist regulär und

$$f'(z)=(1+z)^2,$$

daher ist hierbei $\rho=1$; da aber für verschiedene zwei Punkte des Einheitskreises $|z|<1$

$$z_1=re^{i\frac{\pi}{3}}-1, \quad z_2=re^{-i\frac{\pi}{3}}-1, \quad 0<r<1$$

ist

$$f(z_1)=f(z_2)=-\frac{1+r^3}{3}$$

d. h., ist die Funktion nicht schlicht im Einheitskreise $|z|<1$.

Nun leite ich den Satz, welcher lautet:

Wenn die im Kreise $|z|<R$ reguläre Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

der Bedingung

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \textit{für} \quad z<R^1$$

genüge, so ist $f(z)$ schlicht im Kreise $|z|<\rho$, wobei ρ die kleinste absolute Betrag von der Nullstellen von $f'(z)$ bedeutet,

Um diesen Satz zu beweisen betrachte ich die Potenzreihe

$$\varphi(\zeta)=\rho^2\frac{f(z)-f\left[\dfrac{\rho^2(-\zeta+z)}{\rho^2-\bar{z}\zeta}\right]}{f'(z)(\rho^2-|z|^2)}=\zeta+\gamma_2\zeta^2+\ldots\ldots$$

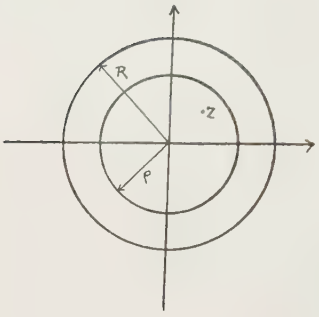
wo z eine Stelle im Kreise $|z|<\rho$ ist; diese Potenzreihe ist offenbar regulär im Kreise $|\zeta|<\rho$.

---

1. Wie man beim Beweise sieht, braucht $\Re\frac{f(z)}{z}$ nicht im genzen $|z|<R$ positiv zu sein, es ist genug, wenn sie nur im $|z|<\rho$ positiv bleibt.

Es ist sehr leicht die Beziehung

Fig. 5



$$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\rho^4}{\rho^2-|z|^2}\cdot\frac{1}{\frac{f(z)}{z}}$$

daraus abzuleiten. Gemäss der Voraussetzung ist

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho\leqq R$$

so ist auch

$$\Re\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho.$$

Folglich ist nach dem ersten Satz des vorigen Teils ist $\varphi(\zeta)$ schlicht im Kreisbereiche $|\zeta|<\rho$, daher, da

$$|\xi|=\left|\frac{\rho^2(-\zeta+z)}{\rho^2-\bar{z}\zeta}\right|<\rho \quad \text{für} \quad |z|<\rho,\ |\zeta|<\rho$$

ist, ist $f(\xi)$ schlicht im Kreise $|\xi|<\rho$, was zu beweisen war.

IV. Eine Bemerkung

Schliesslich möchte ich eine Bemerkung über den von S. Takahashi aufgestellten Satz geben. Der Satz lautet[1]:

Es sei die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär und schlicht im Einheitskreise $|z|<1$, so bildet $f(z)$ den Kreisbereich auf den sternigen bezw. konvexen Bereich ab, wenn

$$(4) \qquad |b_1|+|b_2|+\ldots\ldots+|b_n|+\ldots\ldots\leqq 1$$

bezw.

$$(5) \qquad |c_1|+|c_2|+\ldots\ldots+|c_n|+\ldots\ldots\leqq 1$$

ist, wobei die b_n bezw. die c_n durch

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+b_1z+b_2z^2+\ldots\ldots+b_nz^n+\ldots\ldots$$

bezw.

1. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ. 33 (1930). Die hier gegebene Wortlaute sind modifiziert von der originalen Wortlaute.

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\ldots\ldots+c_nz^n+\ldots\ldots$$

erklärt sind.

In diesem Satze aber ist die Voraussetzung „*schlicht*“ nicht nötig, weil

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<1$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<1$$

ist, wenn die Potenzreihe der Bedingung (4) bezw. (5) genügt.

Daher kann man den Satz folgendermass erläutern:

Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

eine im Kreisbereiche $|z|<1$ *reguläre Potenzreihe, so ist ihr Bildbereich schlicht und noch dazu ist sternig bezw. konvex, wenn sie der Bedingung* (4) *bezw.* (5) *genügt.*

Zum Schlusse bekenne ich, dass ich diese Arbeit nicht schliessen kann, ohne dass ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seinen Anregungen und wertvollen Bemerkungen meinen herzlichen Dank ausdrücke.

Vol. XV, No. 4, Published July 30, 1932

Price - - - - Yen 1.80

These Memoirs are on Sale at

MARUZEN COMPANY, LTD.
TOKYO, OSAKA, KYOTO, NAGOYA, YOKOHAMA,
FUKUOKA & SENDAI

昭和七年七月二十五日印刷
昭和七年七月三十日發行

編纂兼發行者　京都帝國大學理學部

印刷者　須磨勘兵衛
京都市下京區北小路通新町西

印刷所　内外出版印刷株式會社
京都市下京區七條西洞院南

賣捌所　丸善株式會社
東京、大阪、京都、名古屋、横濱、福岡、仙臺

CONTENTS

Théorie de l'Écoulement des Eaux Souterraines
Par Kiugoro Kitagawa 203

On the Distribution of Bombs from a Volcanic Vent
By Takaharu Nomitsu and Munetosi Namba 215

Recherches sur le Degré de Grandeur d'une Certaine Intégrale Définie contenant un Paramètre ; leurs Applications aux Séries Entières et à l'Équation Différentielle Ordinaire
Par Hirosi Okamura 235

Über sternige und konvexe Abbildung
Von Akira Kobori 267

Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet
Von Akira Kobori 279